

فيفري 2020

المستوى: الثالثة ثانوي علوم تجريبية

المدة: 2 سا

فرض الثلاثي الثاني في الرياضيات

التمرين الأول (10 نقط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_1 = \sqrt{e}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$$

1- احسب الحدود u_2, u_3, u_4 و u_4 (تدور النتائج الى 10^{-2}) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2- ا- بين بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_n \leq n + 3$

ب- بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$ ثم استنتج اتجاه تغير (u_n)

3- المتتالية العددية المعرفة بـ : $v_n = u_n - n$

ا- بين ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها العام v_n

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n

4- نضع من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^1 V_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 V_2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n V_n$ حيث $n \geq 1$

$S'_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ و $T_n = \frac{S'_n}{n^2}$ احسب المجموعين S_n و S'_n بدلالة n ثم عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$

التمرين الثاني (10 نقط)

كيس يحتوي على 8 كرات منها 4 كرات حمراء و 3 كرات خضراء و كرة واحدة بيضاء ، نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات من الكيس .

1/ أ * احسب عدد الحالات الممكنة .

ب * احسب احتمالات الأحداث التالية :

A " الحصول على 3 كرات من نفس اللون".

B " الحصول على كرة على الأقل حمراء " .

C " الحصول على كرتين على الأكثر حمراء " .

2/ نسمي X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الألوان المحصل عليها .

أ * ما هي قيم X ؟

ب * احسب الاحتمالات التالية : $P(X=1)$ ، $P(X=3)$ واستنتج $P(X=2)$.

ج * احسب الأمل الرياضي ، التباين ثم الانحراف المعياري .

التصحيح النموذجي

العلامة	الحل	رقم التمرين
	(1) حساب u_4, u_3, u_2 :	
10 ن	$U_2 = \frac{2}{3}U_1 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}\sqrt{e} + \frac{4}{3} = \frac{2\sqrt{e} + 4}{3} \approx 2,43$	
1.5		
1	$U_3 = \frac{2}{3}U_2 + \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3}\left(\frac{2\sqrt{e} + 4}{3}\right) + \frac{5}{3} = \frac{4\sqrt{e} + 23}{9} \approx 3,28$ $U_4 = \frac{2}{3}U_3 + \frac{3}{3} + 1 = \frac{2}{3}\left(\frac{4\sqrt{e} + 23}{9}\right) + 2 = \frac{8\sqrt{e} + 100}{9} \approx 12,58$ (2) أ) البرهان أنه من أجل كل $n \geq 1$: $U_n \leq n + 3$ * من أجل $n = 1$: $U_1 = \sqrt{e} \approx 1,6$ ومنه $U_1 \leq 1 + 3$ (محققة) * نفرض أن $U_n \leq n + 3$ صحيحة ونبين أن : $U_{n+1} \leq n + 4$ لدينا : $U_n \leq n + 3$ ومنه : $\frac{2}{3}U_n \leq \frac{2}{3}(n + 3)$ إذن : $\frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n + 1 \leq \frac{2}{3}(n + 3) + \frac{1}{3}n + 1$ وبالتالي : $U_{n+1} \leq n + 3$ ومنه $U_{n+1} \leq n + 4$ ومنه : $U_{n+1} \leq n + 4$ إذن $p(n + 1)$ صحيحة * الإستنتاج : من أجل كل $n \geq 1$: $U_n \leq n + 3$ (ب) $U_{n+1} - U_n = \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n + 1 - U_n$ $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{3}n + 1 - \frac{1}{3}U_n = \frac{1}{3}(n + 3 - U_n)$	التمرين 1

		لدينا : $U_n \leq n+3$ ومنه: $n+3-U_n \geq 0$
1		أي: $\frac{1}{3}(n+3-U_n) \geq 0$ ومنه: $U_{n+1}-U_n \geq 0$
		ومنه: (U_n) متزايدة
1		(3) أ) إثبات أن (V_n) متتالية هندسية: $V_n = U_n - n$
		$V_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}U_n - \frac{2}{3}n$
		$\boxed{V_{n+1} = \frac{2}{3}V_n} \quad \text{أي} \quad V_{n+1} = \frac{2}{3}(U_n - n)$
0.5		(V_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ و حدها الأول $V_1 = U_1 - 1 = \sqrt{e} - 1$
		ب) <u>عبارة</u> V_n : $V_n = V_1 \times q^{n-1}$
1		$V_n = (\sqrt{e} - 1) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$
		ب) <u>عبارة</u> U_n :
1		$\widetilde{U_n} = (\sqrt{e} - 1) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + n$
1		

$$S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^1 V_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 V_2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n V_n \quad \underline{\text{حساب:}} \quad (4)$$

$$V_n = V_1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \underline{\text{لدينا:}}$$

$$S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^1 V_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 V_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n V_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$S_n = V_1 \left(\frac{2}{3}\right) \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2} \right]$$

$$S_n = V_1 \left(\frac{2}{3}\right) \left[1 + \left(\frac{4}{9}\right) + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \right]$$

0.5

0.5

$$\left| S_n = \frac{6}{5}(\sqrt{e} - 1) \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n \right] \right|$$

$$S'_n = 3(\sqrt{e} - 1) \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}$$

$$T_n = \frac{S'_n}{n^2} = \frac{3}{n^2}(\sqrt{e} - 1) \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}$$

1

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{1}{2}}$$

0.75

1 / 1 * الحالات الممكنة لسحب 3 كرات هي :

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$$

ب* حساب احتمال الأحداث

A : " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "

1

$$P(A) = \frac{\text{الحالات الملائمة}}{\text{الحالات الممكنة}} = \frac{C_3^3 + C_4^3}{56} = \frac{1+4}{56} = \frac{5}{56}$$

1

B : " الحصول على كرة على الأقل حمراء "

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{\text{الحالات الملائمة}}{\text{الحالات الممكنة}} \\ &= \frac{C_4^1 \times C_4^2 + C_4^2 \times C_4^1 + C_4^3 \times C_4^0}{56} \\ &= \frac{24 + 24 + 4}{56} = \frac{52}{56} = \frac{13}{14} \end{aligned}$$

C : " الحصول على كرتين على الأكثر حمراء "

C : " الحصول على كرتين على الأكثر حمراء "

$$P(C) = \frac{C_4^0 \times C_4^3 + C_4^1 \times C_4^2 + C_4^2 \times C_4^1}{56} \\ = \frac{4 + 24 + 24}{56} = \frac{52}{56} = \frac{13}{14}$$

1

2 / تعيين قيم X : $X(\Omega) = \{ 1; 2; 3 \}$

1

$$P(X=1) = P(A) = \frac{5}{56}$$

0.75

$$P(X=3) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_1^1}{56} \\ = \frac{4 \times 3 \times 1}{56} = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$$

0.75

استنتاج $P(X=2)$:

لدينا: $P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$
ومنه

$$P(X=2) = 1 - P(X=1) - P(X=3) \\ = 1 - \frac{5}{56} - \frac{12}{56} = \frac{39}{56}$$

ومنه قانون توزيع الاحتمال للمتغير العشوائي X :

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{56}$	$\frac{39}{56}$	$\frac{12}{56}$

ج - حساب الامل الرياضي:

$$E(X) = \left(1 \times \frac{5}{56}\right) + \left(2 \times \frac{39}{56}\right) + \left(3 \times \frac{12}{56}\right) = \frac{119}{56} \approx 2.13$$

* حساب التباين والانحراف المعياري:

$$v(X) = \sum_{i=1}^3 (x_i - E(X))^2 \times p_i \approx 0.29$$

$$\sigma(X) = \sqrt{v(X)} \approx 0.54$$