

التمرين الأول: (U_n) متتالية عددية معرفة على N بحدها الأول $U_0 = -1$ و $3U_{n+1} = U_n + 4$

1) (أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n, U_n \leq 2$

(ب) جد اتجاه تغير المتتالية. ماذا تستنتج؟

2) نعتبر من اجل كل عدد طبيعي n المتتالية (V_n) المعرفة كما يلي: $V_n = U_n - 2$

(أ) اثبت ان (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها q وحدها الاول V_0

(ب) اكتب عبارة الحد العام V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n

(ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

(د) احسب بدلالة n المجموع $S' = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

التمرين الثاني: (U_n) متتالية هندسية معرفة على N حيث $U_0 = 18$ وبالعلاقة: $U_0 + U_1 + U_2 = 38$

1- بين أن الأساس الموجب للمتتالية (U_n) هو $q = \frac{2}{3}$

2- اوجد عبارة الحد العام U_n بدلالة n

3- ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n)

4- احسب نهاية (U_n)

5- اكتب عبارة المجموع S_n بدلالة n : $S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1}$ ثم استنتج نهاية S_n

5- اوجد قيمة n علما ان $S_n = \frac{3510}{81}$

التمرين الثالث: (I) (U_n) متتالية هندسية حدودها موجبة معرفة على N حيث: $\begin{cases} U_6 = 448 \\ U_3 \times U_5 = 12544 \end{cases}$

(أ) عين الحد U_4 ثم الأساس q ثم احسب الحد الأول لهذه المتتالية

(II) نضع $q = 2$ و $U_0 = 7$

1- اوجد عبارة الحد العام U_n بدلالة n

2- بين ان 896 هو حد من حدود هذه المتتالية وحدد رتبته

3- اكتب عبارة المجموع S_n بدلالة n : $S = U_6 + U_7 + \dots + U_n$

تصحيح الفرض الاول

التمرين 1

1) ابرهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n, U_n \leq 2$

لتكن الخاصية $p(n)$

اثبات صحة $p(0)$

نفرض $p(n)$ صحيحة من اجل عدد طبيعي ونبرهن صحة $p(n+1)$ من اجل عدد طبيعي

ب) اتجاه تغير المتتالية (U_n) بما ان $U_{n+1} - U_n \geq 0$ ومنه المتتالية متزايدة

الاستنتاج بما ان (U_n) متزايدة ومحدودة من الاعلى في مقاربة

2) اثبات ان (V_n) متتالية هندسية يطلب $V_{n+1} = \frac{1}{3}V_n$

نستنتج ان متتالية هندسية اساسها

حدها الاول $V_0 = U_0 - 2$ اي $V_0 = -3$

ب) عبارة الحد العام V_n بدلالة n $V_n = -3\left(\frac{1}{3}\right)^n$

استنتاج U_n بدلالة n $U_n = -3\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2$

ج) لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$ لان $-1 < q < 1$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2$

د) احسب بدلالة n المجموع

$$S' = U_0 + U_1 + \dots + U_n$$

$$= \frac{-5}{2} + \frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 2n$$

التمرين 2

1) لدينا $U_0 + U_0 \times q + U_0 \times q^2 = 38$

$$18q^2 + 18q - 20 = 0$$

ومنه الأساس الموجب للمتتالية (U_n) هو $q = \frac{2}{3}$

2- عبارة الحد العام U_n بدلالة n

$$U_n = 18\left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ ومنه}$$

3) اتجاه تغير المتتالية (U_n) بما ان $U_{n+1} - U_n < 0$ ومنه المتتالية متناقصة

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0 \quad (4)$$

5- اكتب عبارة المجموع S_n بدلالة n :

$$\begin{aligned} S &= U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1} \\ &= 54 \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 54 \text{ وقيمة } n \text{ هي } 4$$

التمرين 3

1) الحد هو $U_4 = 112$

$U_0 = 7$ و $q = 2$

2- عبارة الحد العام U_n بدلالة n

ومنه $U_n = 7(2)^n$

3- بين ان 896 هو حد من حدود هذه المتتالية وحدد رتبته
لدينا $U_n = 896$ ومنه $n = 7$ و منه 896 حد من حدود هذه المتتالية ورتبته هي 8

4- اكتب عبارة المجموع S_n بدلالة n :

$$\begin{aligned} S &= U_6 + U_7 + \dots + U_n \\ &= -448 \left(1 - (2)^{n-5} \right) \end{aligned}$$