



امتحان بكالوريا شتوية

3 سا

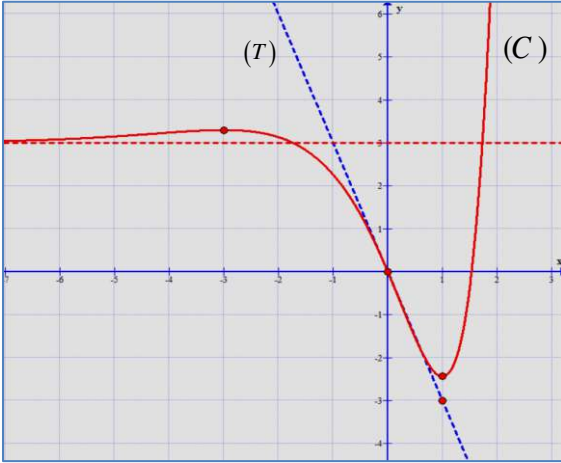
المدة:

اختبار في مادة الرياضيات

الموضوع

التمرين الأول : (4 نقاط)

g الدالة العددية المعرفة على R بـ : $g(x) = (x^2 + a)e^x + b$ حيث a و b عدنان حقيقيان .
(C) منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، (C) يقبل عند $-\infty$ مستقيما أفقيا



معادلته $y = 3$ و يقبل في النقطة O مماسا (T). (انظر الشكل)

(1) عين بيانيا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $g'(0)$ و أحسب $g'(x)$ بدلالة a .

(2) بين أن $a = -3$ و $b = 3$.

(3) بين أن معادلة (T) هي $y = -3x$.

(4) ناقش بيانيا و تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة

$$g(x) = mx$$

التمرين الثاني : (8 نقاط)

(I) الدالة العددية المعرفة على R بـ : $g(x) = (x^2 - 3)e^x + 3$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث $1.53 < \alpha < 1.54$.

(4) عين حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R بـ : $f(x) = 3x + 1 + (x^2 - 2x - 1)e^x$. وليكن (C_f)

منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من R ؛ $f'(x) = g(x)$.

- استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

(3) أ) بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 3x + 1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

ب) ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) .

(4) بين أن (C_f) يقبل مماسين (T) موازيين لـ (Δ) (لا يطلب تعيين معادلتيهما) .

(5) بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $[2.03; 2.04]$ حلا وحيدا β ، ماذا تمثل β بالنسبة لـ (C_f) ؟

(6) أنشئ (C_f) و (Δ) . (نأخذ $f(\alpha) = -2.3$)

(7)

التمرين الثالث : (8 نقاط)

(I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = 1 + x^2 + 2 \ln x$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.52 < \alpha < 0.53$.

(4) عين حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = -x + \frac{3 + 2 \ln x}{x}$. وليكن (C_f) منحناها البياني

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا .

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$ ؛ $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$.

ب) ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج) بين ان $f(\alpha) = 2 \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha \right)$ ثم استنتج حصر $f(\alpha)$.

(3) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا .

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى مقاربه المائل (Δ) .

ج) بين ان (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يطلب تعيين معادلة له .

(4) أنشئ (C_f) و (Δ) و (T) . (نأخذ $f(\alpha) = 2.73$ و $f(0.23) = 0$ و $f(2.12) = 0$)

(5) m وسيط حقيقي ' ناقش بيانيا و حسب قيم m عدد حلول المعادلة : $3 + 2 \ln x - mx = 0$.

انتهي الموضوع



حل الموضوع

حل التمرين الأول : (4 نقاط)

(1) عين بيانيا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $g'(0)$ (0.5 ن)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3 \text{ و } g'(0) = \frac{-3-0}{1-0} = -3$$

أحسب $g'(x)$ بدلالة a : $g(x) = (2x)e^x + (x^2 + a)e^x = (x^2 + 2x + a)e^x$ (0.5 ن)

(2) بين أن $a = -3$ و $b = 3$: (1 ن)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3 \text{ ان } b = 3$$

$$g'(0) = -3 \text{ أي } (0^2 + 2(0) + a)e^0 = -3 \text{ و منه } a = -3$$

(3) بين أن (T) معادلة هي $y = -3x$: $y = g'(0)(x-0) + g(0)$ و منه $y = -3x$ (1 ن)

(4) ناقش بيانيا و تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $g(x) = mx$ (1 ن)

• إذا كان $m \in]-\infty; -3]$ فإن المعادلة تقبل حل وحيد.

• إذا كان $m \in]-3; 0[$ فإن المعادلة تقبل 3 حلول .

• إذا كان $m \geq 0$ المعادلة تقبل حلين .

التمرين الثاني : (8 نقاط)

g الدالة العددية المعرفة على R بـ : $g(x) = (x^2 - 3)e^x + 3$

احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ (0.5 ن)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x - 3e^x + 3 = 3$$

ادرس اتجاه تغير الدالة g (0.5 ن)

من أجل كل x من R بـ : $g'(x) = (2x)e^x + (x^2 - 3)e^x = (x^2 + 2x - 3)e^x$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-
			0	+

الدالة g متناقصة تماما على $[-3; 1]$ و متزايدة تماما على $]-\infty; -3]$ و $[1; +\infty[$.

ثم شكل جدول تغيراتها (0.5 ن)

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$g(x)$		$g(-3)$	$g(1)$	$+\infty$
		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
	3			

بين ان $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث $1.53 < \alpha < 1.54$ (0.5 + 0.25 ن)
 $g(0) = 0$ اذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل معدوم .

g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1; +\infty[$ و من ثم على $[1.53; 1.54]$ و لدينا $g(1.53) < 0$ و $g(1.54) > 0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.53 < \alpha < 1.54$.

عين حسب قيم x إشارة $g(x)$: (0.5 ن)

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$
		$+$	$-$	$+$

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R بـ: $f(x) = 3x + 1 + (x^2 - 2x - 1)e^x$.

احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (0.5 ن)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x + 1 + x^2 e^x - 2x e^x - e^x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x + 1 + x^2 \left(1 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) e^x = +\infty$$

بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من R ؛ $f'(x) = g(x)$ (0.5 ن)
من أجل كل عدد حقيقي x من R ؛

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 + (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x - 1)e^x \\ &= 3 + (x^2 - 2x - 1 + 2x - 2)e^x = 3 + (x^2 - 3)e^x = g(x) \end{aligned}$$

استنتج اتجاه تغير الدالة f (0.5 ن)
الدالة f متناقصة تماما على $[0; \alpha]$ و متزايدة تماما على $]-\infty; 0]$ و $[\alpha; +\infty[$.

و شكل جدول تغيراتها (0.5 ن)

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$
		$+$	$-$	$+$
$f(x)$		0	$f(\alpha)$	$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

أ) بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 3x + 1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$ (0.5 ن)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (3x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x - 2x e^x - e^x = 0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 3x + 1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

ب) ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) (0.5 ن)

$$f(x) - (3x + 1) = (x^2 - 2x - 1)e^x$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \text{ معناه } x = 1 + \sqrt{2} \text{ أو } x = 1 - \sqrt{2}$$

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f(x)-y$	+	0	-	0	+
الوضع النسبي	(C)	(C)	(C)	(C)	(C)
	فوق	يقطع	تحت	يقطع	فوق
	(Δ)	(Δ)	(Δ)	(Δ)	(Δ)

4) بين أن (C_f) يقبل مماسين (T) موازيين لـ (Δ) (لا يطلب تعيين معادلتيهما) (0.5 ن)

$$f'(x) = 3 \text{ معناه } 3 + (x^2 - 3)e^x = 3 \text{ ومنه } (x^2 - 3)e^x = 0 \text{ ومنه } x^2 - 3 = 0 \text{ معناه } x = \sqrt{3} \text{ أو } x = -\sqrt{3}$$

اذن (C_f) يقبل مماسين (T) موازيين لـ (Δ) .

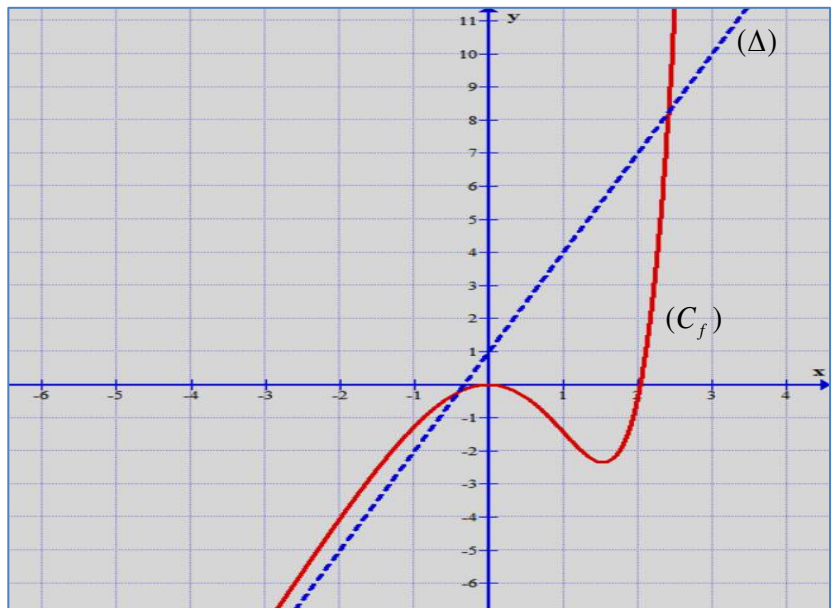
5) بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $[2.03; 2.04]$ حلا وحيدا β (0.5 ن)

f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[2.03; 2.04]$ ولدينا $g(2.03) < 0$ و $g(2.04) > 0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في $[2.03; 2.04]$

، ماذا تمثل β بالنسبة لـ (C_f) ؟ β هي فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .. (0.25 ن)

6) أنشئ (C_f) و (Δ) . (نأخذ $f(\alpha) = -2.3$) (1 ن)



حل التمرين الثالث : (8 نقاط)

(I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = 1 + x^2 + 2 \ln x$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ (0.5 ن)

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g : (0.5 ن)

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا ، $g'(x) = 2x + \frac{2}{x} = \frac{2x^2 + 2}{x}$

من اجل كل x من $]0, +\infty[$ ، $2x^2 + 2 > 0$ و $x > 0$ و منه $g'(x) > 0$. وبالتالي فالدالة g متزايدة تماما على $]0, +\infty[$.

ثم شكل جدول تغيراتها (0.5 ن)

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(3) بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.52 < \alpha < 0.53$ (0.5 ن)

g مستمرة و متزايدة تماما على $[0.52; 0.53]$ ولدينا $g(0.52) < 0$ و $g(0.53) > 0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.52 < \alpha < 0.53$.

(4) عين حسب قيم x إشارة $g(x)$ (0.5 ن)

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		-	+

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = -x + \frac{3 + 2 \ln x}{x}$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا (0.5 ن)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x + \frac{1}{x} (3 + 2 \ln x) = -\infty \quad \text{و} \quad \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \frac{3}{x} + \frac{2 \ln x}{x} = -\infty$$

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$ ؛ $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$ (0.5 ن)

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا ،

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 + \frac{\frac{2}{x} \times x - 1 \times (3 + 2 \ln x)}{x^2} = -1 + \frac{2 - 3 - 2 \ln x}{x^2} \\ &= -1 + \frac{-1 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{-x^2 - 1 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{-(x^2 + 1 + 2 \ln x)}{x^2} = \frac{-g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

ب) ثم شكل جدول تغيرات الدالة f (0.5 ن)

من اجل كل x من $]0; +\infty[$ ، إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $g(x)$

x	0	α	$+\infty$
$f(x)$		$f(\alpha)$	

(ج) بين ان $f(\alpha) = 2 + \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)$ ثم استنتج حصر لـ $f(\alpha)$ (0.5 ن)

لدينا $g(\alpha) = 0$ أي $1 + \alpha^2 + 2 \ln \alpha = 0$ أي $2 \ln \alpha = -1 - \alpha^2$

لدينا من جهة أخرى $f(\alpha) = -\alpha + \frac{3 + 2 \ln \alpha}{\alpha}$ و منه

$$f(\alpha) = -\alpha + \frac{3 - 1 - \alpha^2}{\alpha} = -\alpha + \frac{2 - \alpha^2}{\alpha} = -\alpha + \frac{2}{\alpha} - \frac{\alpha^2}{\alpha} = -\alpha + \frac{2}{\alpha} - \alpha = -2\alpha + \frac{2}{\alpha} = 2\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)$$

(3) ثم استنتج حصر لـ $f(\alpha)$.

لدينا $0.52 < \alpha < 0.53$ ومنه $\frac{1}{0.53} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{0.52}$ (1) و $-0.53 < -\alpha < -0.52$ (2)

بجمع (1) و (2) نجد $1.36 < \frac{1}{\alpha} - \alpha < 1.4$ ومنه $2.72 < 2\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right) < 2.8$

(4) ا) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ (0.5 ن)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} + \frac{2 \ln x}{x} = 0$$

و فسر النتيجة هندسياً (0.25 ن)

المستقيم ذو المعادلة $y = -x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $+\infty$.

(ب) ادرس وضعية (C) بالنسبة الى مقاربه المائل (Δ) (0.5 ن)

ندرس إشارة $f(x) + x$ أي إشارة $\frac{3 + 2 \ln x}{x}$. $3 + 2 \ln x = 0$ تعني $\ln x = -\frac{3}{2}$ أي $x = e^{-\frac{3}{2}}$.

x	0	$e^{-\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوضع النسبي	(C) تحت (Δ)	(C) يقطع (Δ)	(C) فوق (Δ)

(ج) بين ان (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) (0.25 ن)

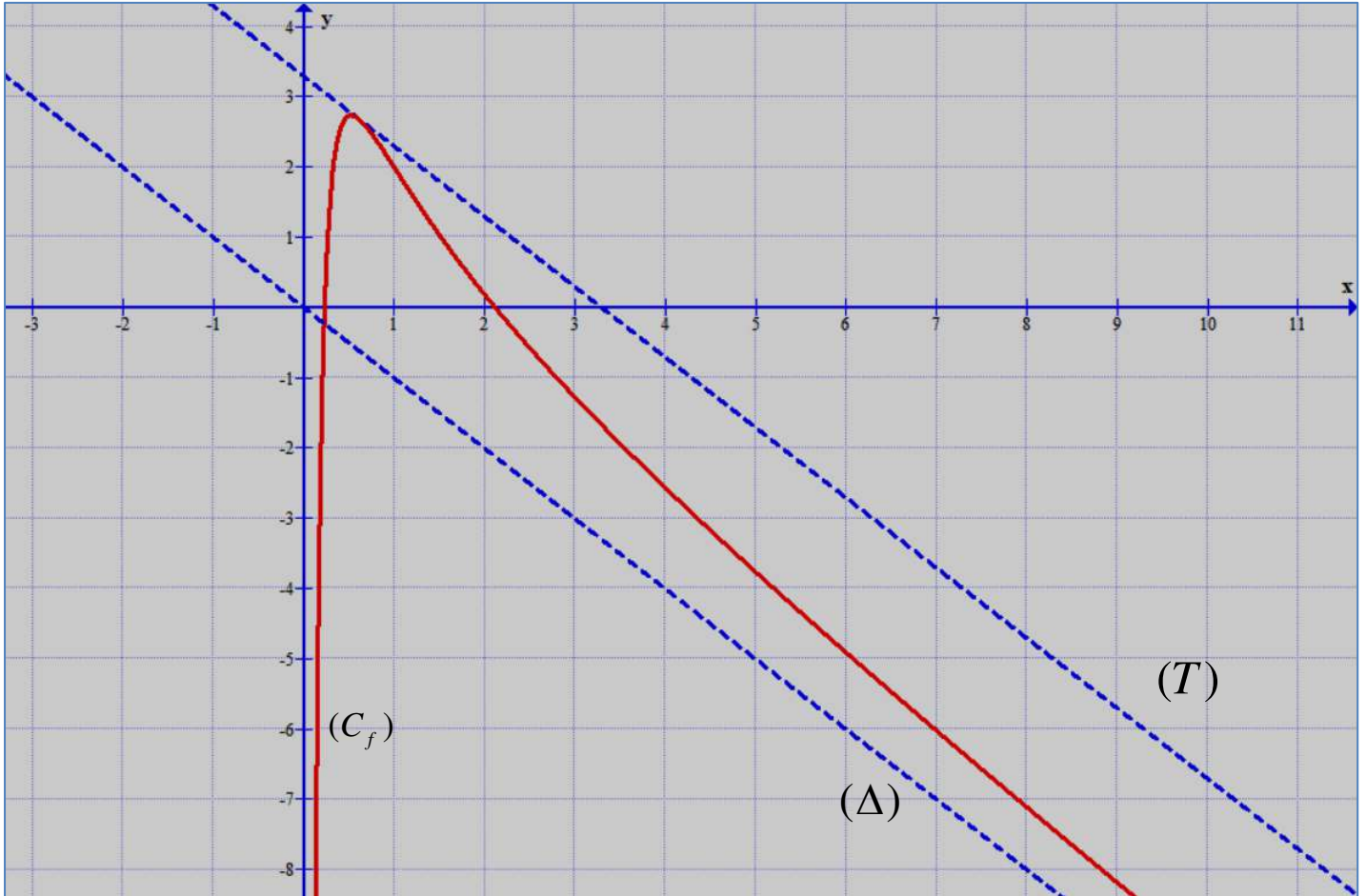
$f'(x_0) = -1$ تعني $\frac{-x_0^2 - 1 - 2 \ln x_0}{x_0^2} = -1$ أي $-x_0^2 - 1 - 2 \ln x_0 = -x_0^2$ أي $\ln x_0 = -\frac{1}{2}$ أي $x_0 = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

إذن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

يطلب تعيين معادلة ديكارتية له (0.25 ن)

$$y = -x + 2\sqrt{e} \text{ هي: معادلة } (T) \text{ ، } y = -1(x - \frac{1}{\sqrt{e}}) + \frac{1}{\sqrt{e}} + 2\sqrt{e} = -x + 2\sqrt{e} \text{ و منه } y = f'(\frac{1}{\sqrt{e}})(x - \frac{1}{\sqrt{e}}) + f(\frac{1}{\sqrt{e}})$$

(5) أنشئ (C_f) و (Δ) و (T) (1 ن)



(6) ناقش بيانيا و حسب قيم m عدد حلول المعادلة : $3 + 2 \ln x - mx = 0$ (0.5 + 0.25 ن)

المعادلة : $3 + 2 \ln x - mx = 0$ معناه $3 + 2 \ln x = mx$ و منه $\frac{3 + 2 \ln x}{x} = m$ و منه

$$-x + \frac{3 + 2 \ln x}{x} = -x + m \text{ أي } f(x) = -x + m .$$

- إذا كان $m \in]-\infty; 0]$ فإن المعادلة تقبل حل وحيد.
- إذا كان $m \in]0; 2\sqrt{e}[$ فإن المعادلة تقبل حلين.
- إذا كان $m = 2\sqrt{e}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا.
- إذا كان $m > 2\sqrt{e}$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .

وهكم الله في بكالوريا 2024