

التمرين الأول

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_1 = -2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n - 2 < 0$.

2. أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 1$.

ب- استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و بين انها متقاربة.

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n = 2u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي.

- عين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ ثم احسب حدها الأول v_1 .

نضع في كل مما يلي : $\alpha = -4$.

أ- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

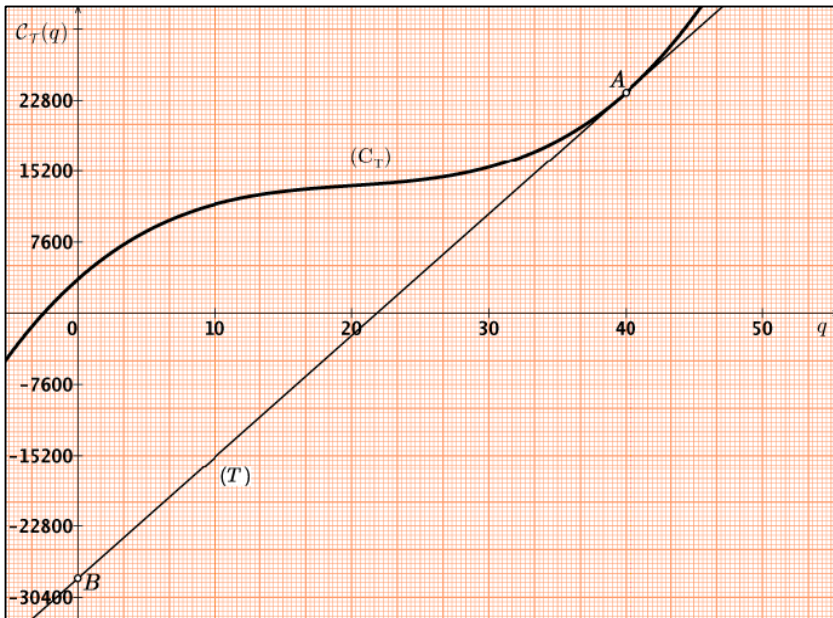
ب- احسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

التمرين الثاني

نعتبر التمثيل البياني (C_T) المقابل هو لدالة الكلفة الإجمالية C_T وهي لمصنع ينتج مواد أولية للبناء ، الوحدات المنتجة q مقدرة

بآلاف الأطنان حيث $q \in [0, 50]$ والكلفة مقدرة بمئات الدنانير ، (T) مماس للمنحنى (C_T) في النقطة $A(40, 23600)$

ويقطع حامل محور الترتيب في النقطة $B(0, -28400)$.



1. بقراءة بيانية :

أ- ماهي كلفة إنتاج 40 ألف طن من المنتج.

ب- احسب $C_T'(40)$.

ج- اكتب معادلة المماس (T) .

2. اذا علمت أن :

$$C_T(q) = q^3 - 60q^2 + 1300q + 3600$$

عين دالة الكلفة الهامشية C_m .

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1, +\infty[$ بـ : $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$

1. ادرس اتجاه تغير الدالة g .

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

3. استنتج إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1, +\infty[$ بـ : $f(x) = x + 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; i, j)$.

1. احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

3. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

4. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1, +\infty[$ بـ : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

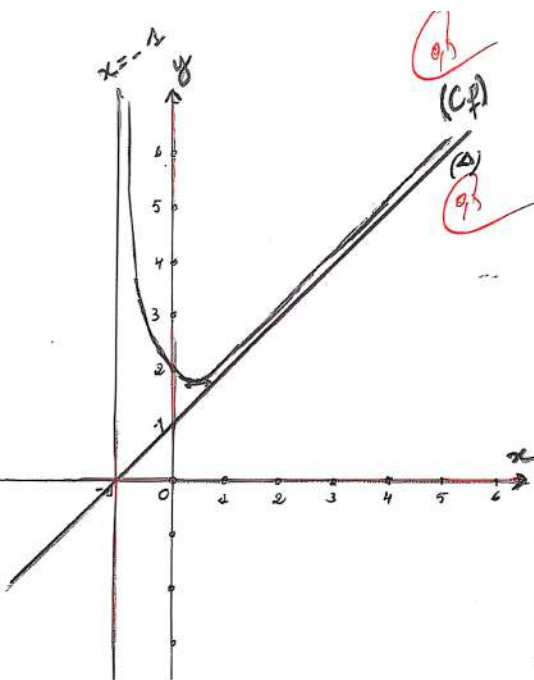
5. ارسم (Δ) و (C_f) .

التمرين الثاني :
 ① كلفة انتاج 40 طن في 23600 دينار
 حساب $C_T(40)$
 $C_T(40) = \frac{-28400 - 23600}{0 - 40} = 1300$
 ② كتابة معادلة التماس (T):
 $y = C_T(40)(q - 40) + C_T(40)$
 $y_T = 1300(q - 40) + 23600$
 $= 1300q - 28400$
 ③ دالة الكلفة الهامشية C_m :
 $C_m(q) = C_T'(q) = 3q^2 - 120q + 1300$
 التمرين الثالث :
 ① اتمام دالة g :
 $\Delta = 0$ ، $g'(x) = 3x^2 + 6x + 3$
 $g'(x) = 0$ ، $x = -1$ ، $x = -1$
 الدالة g متزايدة كما :
 $g(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x + 1$
 ② كما أن g مستمرة و متزايدة كما على
 $g(0) \times g(\frac{1}{2}) < 0$
 $= -1$ ، $= 1,375$
 فانه حسب مبرهنة القيمة المتوسطة المتزايدة
 $g(x) = 0$ ، $g(x)$ تتغير على واحد q
 ③ إشارة $g(x)$:

x	-1	0	+
$g(x)$	-	0	+

$V_{n+1} = 11n + 2 + q = \frac{V_n - q}{2} + q + 2$
 $= \frac{1}{2}V_n + \frac{q+4}{2}$
 حتى تكون (V_n) متساوية هذه نسبة ،
 $q = -4$ أي $q+4=0$
 حساب حد ها الأول V_1 :
 $V_1 = 2M_1 - 4 = 2(-2) - 4 = -8$
 كتابة V_n بدلالة n :
 $V_n = V_1 + q^{n-1} = -8(\frac{1}{2})^{n-1}$
 كتابة u_n بدلالة n :
 $u_n = \frac{V_n + 4}{2} = \frac{-8(\frac{1}{2})^{n-1} + 4}{2}$
 $= -4(\frac{1}{2})^{n-1} + 2$
 حساب نهاية u_n :
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} -4(\frac{1}{2})^{n-1} + 2 = 2$
 حساب مجموع S_n :
 $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$
 $= \frac{V_1 + 4}{2} + \frac{V_2 + 4}{2} + \dots + \frac{V_n + 4}{2}$
 $= \frac{1}{2}(V_1 + V_2 + \dots + V_n + 4 + \dots + 4)$
 $= \frac{1}{2}[\frac{V_1}{1-q}(1-q^n) + 4n]$
 $= -8[1 - (\frac{1}{2})^n] + 2n$

تصحيح اختبار الفصل الأول
 التمرين الأول :
 البرهان بالتراجع:
 نفرض : $P(n) : 11n - 2 < 0$
 من أجل $n = 1$: $11 - 2 < 0$ أي $9 < 0$
 ومنه $P(1)$ صحيحة .
 نفرض ان صحة $P(m)$ ونبرهن صحة :
 $P(m+1) : 11(m+1) - 2 < 0$
 لنبدأ :
 $11m - 2 < 0$ أي $\frac{1}{2}11m - 1 < 0$ أي $\frac{1}{2}11m - 1 + 2 < 2$
 أي $11m + 1 - 2 < 2$ ومنه $P(m+1)$ صحيحة .
 لنفرض ان كل عدد طبيعي في مجموع m :
 $11m - 2 < 0$
 ② = التحقق :
 $11(m+1) - 11m = \frac{1}{2}11m + 1 - 11m = -\frac{1}{2}11m + 1$
 ③ الاستنتاج :
 $11(m+1) - 11m = -\frac{1}{2}11m + 1 = -\frac{1}{2}(11m - 2)$
 ومنه : $11(m+1) - 11m > 0$ اذن :
 المتتالية $(11n)$ متزايدة كما .
 - التقارب : كما أن $(11n)$ متزايدة كما و محدودة
 من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة .
 ③ تحصيل غيبة q :
 $V_{n+1} = 211n + 1 + q = 2(\frac{1}{2}11n + 1) + q$



$$f'(x) = \frac{(x+1)(3x^2+6x+3)(x+1) - 2(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{3x^3+6x^2+3x+3x^2+6x+3-2x^3-6x^2-6x-4}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{x^3+3x^2+3x-1}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

③ استنتاج اتجاه تغير f

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	-	•	+
$(x+1)^3$	+	+	+
$f'(x)$	-	•	+

الدالة f متزايدة تماماً على $[\alpha, +\infty[$ و

متناقصة تماماً على $] -1, \alpha]$.

- جدول التغيرات :

x	-1	α	$+\infty$
$f(x)$		-	+

$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$
		$f(\alpha)$	

$$f(\alpha) \approx 1,89$$

⑤ ① حساب النهايات : $\lim_{x \rightarrow -1} x+1 + \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$

التقارب الهندسي : (f) تقبل مستقيم مماساً ب $x = -1$ معادلته $x = -1$.

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 + \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$

② بيان أن المستقيم (د) مماساً ب (f) نحواً $+\infty$:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 + \frac{1}{(x+1)^2} - (x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+1)^2} = 0$

وهذه (د) مستقيم مماساً ب (f) نحواً $+\infty$ ،

③ الوضع النسبي : $f(x) - y = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$

x	-1	$+\infty$
$f(x) - y$	+	+

④ بيان أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

$f(x) = \frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{(3x^2+6x+3)(x+1) - 2(x+1)(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^4}$