



اختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأول (09 ن): اختر الجواب الصحيح مع التعليل من بين 3 أجوبة مقترحة لكل من الأسئلة التالية:

1 - الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = 2 - \frac{\ln(x^2)}{x}$ منحناها البياني يقطع المستقيم ذي المعادلة $y = 2$ في:

أ - نقطة واحدة ب - نقطتين ج - ولا نقطة.

2 - دالة g تمثل حلا للمعادلة التفاضلية: $2y' + 3y = 1$ والتي تحقق $g\left(-\frac{2}{3}\right) = 1$ ، منحناها البياني يقبل

مستقيم مقارب عند $+\infty$ هو: أ - $y = \frac{1}{3}$ ب - $y = -\frac{1}{3}$ ج - $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

3 - المعادلة $3(\log(x+3))^2 + \log(x+3) - 10 = 0$ تقبل في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$:

أ - حلين سالبين ب - حلين موجبين ج - حلين مختلفين في الإشارة.

4 - الدالة المعرفة على مجال $]-2; 2[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$ والتي تحقق:

أ - دالة فردية ب - دالة زوجية ج - دالة لا فردية ولا زوجية.

5 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{2e^x - x^2}\right)$ تساوي: أ - $\frac{1}{2}$ ب - $-\infty$ ج - $+\infty$. (يمكن استعمال نهاية دالة مركبة).

6 - f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x + \ln(1 + 2e^x)$; $g(x) = \ln(e^{-x} + 2)$

(C_f) و (C_g) منحناهما البيائين يحققان من أجل كل عدد حقيقي x :

أ - (C_f) يقع تحت (C_g) ب - (C_f) يقع فوق (C_g) ج - (C_f) و (C_g) متطابقان.

التمرين الثاني (11 ن): نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \frac{(x-1)e^{\frac{1}{2}x} - x}{e^{\frac{1}{2}x} - 1}$ ، (C_f) منحناها البياني

الممثل في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

1 - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم فإن:

$$f(x) = x - \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{e^{\frac{1}{2}x} - 1} ; \quad f(x) = x - 1 - \frac{1}{e^{\frac{1}{2}x} - 1}$$

2 - أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ص (1 من 2)

(ب) - بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) ; (Δ') بطلب تعيين معادلتيهما

عند $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب.

(ج) - احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ثم $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ فسر النتائج هندسياً؟

3 - (أ) - ادر من اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(ب) - بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسان (T) ; (T') ميل كل منهما يساوي 2 عند النقطتين A و B على الترتيب بطلب تعيين احداثياتهما وكتابة معادلة ديكرتية لكل من المماسين.

(ج) - أثبت أن النقطة $w(0; -\frac{1}{2})$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

4 - (أ) - بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β فقط حيث: $-1,2 < \alpha < -1,21$; $1,7 < \beta < 1,8$

(ب) - ارسم المستقيمت المقاربة (Δ) ; (Δ') والمنحنى (C_f) بعناية.

(ج) - عين قيم الوسيط الحقيقي m بيانها حتى لا تقبل المعادلة $f(x) = x + \log(m)$ أي حل.

5 - g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $g(x) = \frac{(x-1)e^{\frac{1}{2}x} - x}{|1 - e^{\frac{1}{2}x}|}$ ، (C_g) منحناها البياني.

(أ) - اكتب الدالة g دون رمز القيمة المطلقة.

(ب) - اشرح كيفية رسم (C_g) انطلاقاً من (C_f) .

(ج) - انشئ (C_g) في معلم جديد.

انتهى

بالتوفيق،

التمرين الأول (09ن):

1 - ب (نقطتين) 0,5 ن

التعليل: $f(x) = 2$ معناه: $\frac{\ln x^2}{x} = 0$ 0,25 ن

معناه: $\begin{cases} \ln x^2 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ 0,25 ن

المعادلة تقبل حلين بعد حذف $\ln$ نجد: $x = 1$ و $x = -1$ 0,25 ن

وبالتالي هناك نقطتين ذات الاحداثيات $(1; 2)$ و $(-1; 2)$ 0,25 ن

2 - أ $(y = \frac{1}{3})$ 0,5 ن

التعليل: المعادلة التفاضلية المعطاة من الشكل: $y' = -\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}$ وبالتالي الحل العام للمعادلة

هو $g(x) = Ce^{-\frac{3}{2}x} + \frac{1}{3}$ 0,5 ن

بما أن C ثابت باستعمال الثنائية المعطاة يساوي: $\frac{2}{3}e^{-1}$ وعليه:

..... $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{1}{3}$ 0,5 ن

3 - ج (حلين مختلفين في الإشارة) 0,5 ن

التعليل: أولاً تعيين مجموعة التعريف $D = \{x \in \mathbb{R} ; x + 3 > 0\}$

..... 0,25 ن $D =]-3 ; +\infty[$ معناه: $x + 3 > 0$

ثانياً: حل المعادلة نضع: $\log(x + 3) = t$ بالتعويض نجد:

..... 0,25 ن $3t^2 + t - 10 = 0$ معادلة من الدرجة الثانية تقبل حلين: $t_0 = \frac{5}{3}$; $t_1 = -2$

..... 0,25 ن بالتعويض في عبارة $\log$ نجد: $x_0 = 10^{\frac{5}{3}} - 3$ موجب

..... 0,25 ن $x_1 = 10^{-2} - 3$ سالب

4 - أ (دالة فردية) 0,5 ن

التعليل: من أجل كل $x \in D_f$ ، $-x \in D_f$ فإن:

..... 0,25 ن $f(-x) = -f(x)$ محققة

5 - ب 0,5 ن

التعليل: باستعمال نهاية دالة مركبة ح ع ت $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2e^x - x^2} = \frac{1}{+\infty - \infty}$ 0,25 ن

..... 0,25 ن إزالة ح ع ت: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x(2 - \frac{x^2}{e^x})} = 0^+$

ص (1)

و عليه: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ 0,25ن

و بالتالي: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{2e^x - x^2}\right) = -\infty$ 0,25ن

ج - 6 (منحنيان متطابقان) 0,5ن

التعليل: ندرس إشارة الفرق $f(x) - g(x) = 0$ 0,25*4ن

التمرين الثاني (11ن):

1 - تبين ما يلي: $f(x) = x - 1 - \frac{1}{e^{\frac{1}{2}x} - 1} = \frac{xe^{\frac{1}{2}x} - e^{\frac{1}{2}x} - x}{e^{\frac{1}{2}x} - 1} = f(x)$ 0,5ن

..... 0,5ن $f(x) = x - \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{e^{\frac{1}{2}x} - 1} = \frac{(x-1)e^{\frac{1}{2}x} - x}{e^{\frac{1}{2}x} - 1} = f(x)$

2 - حساب ما يلي: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 0,25ن

ب - تبين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) ; (Δ') عند $+\infty$; $-\infty$

على الترتيب: حسب السؤال الأول الدالة f من الشكل: $f(x) = ax + b + h(x)$ حيث:

$a = 1$; $b = -1$ و $h(x) = -\frac{1}{e^{\frac{1}{2}x} - 1}$ المنحنى (C_f) يقبل (Δ) مستقيم مقارب مائل معادلته

$y = x - 1$ إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^{\frac{1}{2}x} - 1} = 0$ 0,5ن

بنفس الطريقة المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ') معادلته $y = x$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{\frac{1}{2}x}}{e^{\frac{1}{2}x} - 1} = 0$ 0,5ن

ج - حساب ما يلي: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ 0,25*2ن

المنحنى البياني (C_f) يقبل حامل محور الترتيب مستقيم مقارب له معادلته $x = 0$ 0,5ن

3 - دراسة اتجاه تغير الدالة f : $f'(x) = 1 + \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{2(e^{\frac{1}{2}x} - 1)^2}$ 0,5ن

من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم: $f'(x) > 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما 0,5ن

تشكيل جدول تغيرات الدالة f : 0,5ن

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$		$-\infty$ ↗ $+\infty$

ب) - تبين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسان (T) ; (T') ميل كل منهما يساوي 2 : 0,25*2 ن

نقوم بحل المعادلة: $f'(x) = 2$ نجد: $2e^x - 5e^{\frac{1}{2}x} + 2 = 0$ بوضع $e^{\frac{1}{2}x} = t$ مع $t > 0$.

نجد: $x_0 = 2\ln(2)$; $x_1 = -2\ln(2)$ وعليه يوجد مماسان (T) ; (T') عند نقطتين

..... 0,25*2 ن $B(-2\ln 2 ; 4 - 2\ln 2)$; $A(2\ln(2) ; 2\ln(2) - 2)$

كتابة معادلتى المماسين (T) ; (T') عند النقطتين A و B على الترتيب:

..... 0,5*2 ن $(T'): y = 2x + 2\ln 2 + 4$, $(T): y = 2x - 2\ln 2 - 2$

ج) إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل $w(0 ; -\frac{1}{2})$ مركز تناظر له:

من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$, $-x \in \mathbb{R}^*$ فإن: $f(-x) + f(x) = -1$ 0,5 ن

4 - ا) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين فقط حيث: $-1,21 < \alpha < -1,20$; $1,7 < \beta < 1,8$

من جدول التغيرات نلاحظ: 0,5*2 ن

- الدالة f معرفة ومستمرة ومتزايدة تماما على كلا المجالين: $[-1,21 ; -1,2]$; $[1,7 ; 1,8]$

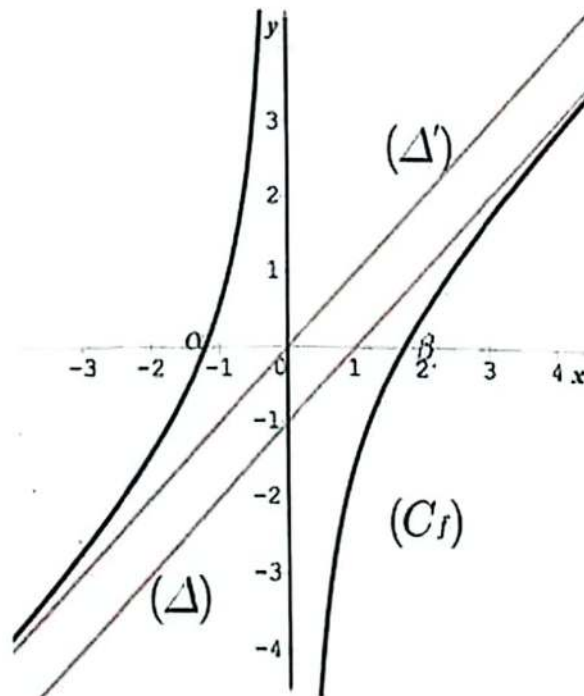
- $f(-1,21) = -0,006$; $f(-1,2) = 0,016$ لأن: $f(-1,21) \times f(-1,2) < 0$

- $f(1,7) = -0,046$; $f(1,8) = 0,114$ لأن: $f(1,7) \times f(1,8) < 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β بالضبط بحيث:

$-1,21 < \alpha < -1,20$; $1,7 < \beta < 1,8$

ب) - رسم المستقيمين (Δ) ; (Δ') والمنحنى (C_f) : 0,25*2 ن + 0,5 ن



ج) - نعين قيم الوسيط الحقيقي m بحيث المعادلة $f(x) = x + \log(m)$ لا تقبل أي حل :

..... 0,5 ن $m \in [1 ; 10]$

$m \in [\frac{1}{10} ; 1]$

5 - ا) كتابة الدالة g دون رمز القيمة المطلقة: 0,25 ن

$$\begin{cases} |1 - e^{\frac{1}{2}x}| = 1 - e^{\frac{1}{2}x} ; x < 0 \\ |1 - e^{\frac{1}{2}x}| = e^{\frac{1}{2}x} - 1 ; x > 0 \end{cases} \text{ لدينا:}$$

$$\begin{cases} g(x) = -f(x) ; x < 0 \\ g(x) = f(x) ; x > 0 \end{cases} \text{ وبالتالي:}$$

ب) شرح كيفية رسم (C_g) انطلاقا من (C_f) : 0,25 ن

من أجل كل عدد حقيقي x سالب: (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة لمحور الفواصل.

من أجل كل عدد حقيقي x موجب: (C_f) و (C_g) متطابقان.

ج) انشاء المنحنى (C_g) في معلم جديد: 0,5 ن

