

فرض الثلاثي الثاني

المدة: ساعة

مادة الرياضيات

الشعبة: 3 علوم تجريبية 2

عاجل تمرين من التمرينين

التمرين الأول :

(1) الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C) للدالة f المعرفة على المجال $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

ب : $f(x) = \frac{3x-1}{2x}$

و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(أ) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

(2) نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

(أ) باستعمال التمثيل البياني (C) والمستقيم (Δ) مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل ، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n) .

(ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$.

(ج) بين أن (u_n) متناقصة تماما. ماذا تستنتج ؟ أحسب نهايتها.

(3) (أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$

(ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب : $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$.

(أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

(ج) استنتج مرة أخرى $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(5) أحسب S_n بدلالة n حيث : $S_n = \frac{v_0 - 1}{u_0} + \frac{v_1 - 1}{u_1} + \frac{v_2 - 1}{u_2} + \dots + \frac{v_n - 1}{u_n}$

التمرين الثاني : الأجزاء I II III منفصلة

I. (w_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث : $\begin{cases} w_1 + w_3 = 30e \\ \ln(w_2) - \ln(w_4) + 2\ln 3 = 0 \end{cases}$

أ) عين w_0 و أساس q .

ب) عبر عن w_n بدلالة n .

II. $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = 3 - \frac{4}{u_n + 2} \end{cases}$, $v_n = \frac{u_n + \alpha}{u_n + 1}$ نعتبر المتتالي (u_n) و (v_n) المتتالية المعرفتان على ب: $\frac{1}{4}$

جد قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$

III. نعتبر المتتالي (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $u_0 = 1$ ، $3u_{n+1} = 2u_n + n + 3$.

1. أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2. أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \leq n + 3$

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = u_n - n$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) عبر عن v_n و u_n بدلالة n .

ت) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ماهي نهايتها ؟

4. - أحسب S_n بدلالة n حيث : $S_n = (u_0)^2 + (u_1 - 1)^2 + (u_2 - 2)^2 + \dots + (u_n - n)^2$

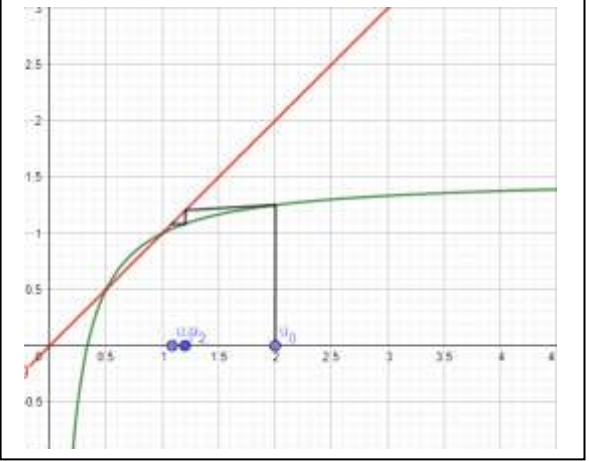
- أحسب S'_n بدلالة n حيث : $S'_{112} = Ln(v_7 \times v_8 \times \dots \times v_{112})$

الحل النموذجي لفرض الثلاثي الثاني

الشعبة: 3 علوم تجريبية 2

مادة الرياضيات

الأستاذة: جلام

التنقيط	الأجابة
20	<u>التمرين الأول:</u>
01	1. <u>دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$</u> الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ ومن أجل كل $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$: $f'(x) = \frac{1}{2x^2}$ من أجل كل $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$
01	2. <u>(u_n) متتالية حيث: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = f(u_n)$</u> <u>أ/ تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2 على محور الفواصل:</u> لدينا: $M_0(u_0, u_1)$ أي $M_0(1, u_1)$ نسقط M_0 على (Δ) وفق (ox) , ثم نسقط النقطة المحصل عليها على (C) وفق (oy) فنحصل على M_1 وهكذا نكرر نفس العملية فنحصل على M_2  <u>التخمين:</u> بما أن $u_0 > u_1 > u_2$ المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومتقاربة <u>(ب) البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$</u> نسي $p(n)$ الخاصية : $u_n > 1$ ① من أجل $n = 0$ لدينا: $u_0 = 2$ و $2 > 1$ ومنه $p(0)$ صحيحة . ② نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $u_n > 1$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1} > 1$ لدينا $u_n > 1$ ومنه $f(u_n) > f(1)$ حسب السؤال (-1) لأن f متزايدة تماما أي $u_{n+1} > 1$ أي أن $p(n+1)$ صحيحة اذن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n <u>ج. تبيان أن (u_n) متناقصة تماما</u> $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n - 1}{2u_n} - u_n = \frac{3u_n - 1 - 2u_n^2}{2u_n}$ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $= \frac{-2(u_n - 1)\left(u_n - \frac{1}{2}\right)}{2u_n}$ - ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n > 1$ وبالتالي $2u_n > 0$ - ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n > 1$ وبالتالي $u_n - \frac{1}{2} > 0$ ومنه $u_n - \frac{1}{2} > 0$ - ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n > 1$ وبالتالي $u_n - 1 > 0$
02	

ومنه $0 < \frac{-2(u_n - 1)\left(u_n - \frac{1}{2}\right)}{2u_n}$ أي $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

/ استنتاج :

بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ 1 فإن (u_n) متقاربة

حساب نهايتها :

بما أن (u_n) متقاربة فإن من أجل كبير بقدر الكافي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$

أي أن $\ell = \frac{3\ell - 1}{2\ell}$ ومنه $3\ell - 1 = 2\ell^2$ ومنه $3\ell - 1 - 2\ell^2 = 0$ نحل المعادلة نجد $\ell = 1$ أو $\ell = \frac{1}{2}$ مرفوض لأن $u_n > 1$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

1.3. اثبات أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1 = \frac{3u_n - 1 - 2u_n}{2u_n} = \frac{u_n - 1}{2u_n}$$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n > 1$ وبالتالي $\frac{1}{u_n} < 1$ ومنه $\frac{1}{2u_n} < \frac{1}{2}$ ومنه $\frac{u_n - 1}{2u_n} < \frac{1}{2}(u_n - 1)$ إذن $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$

ب . تبين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

نسمي $p(n)$ الخاصية : $u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

1 من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$ و $u_0 - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$

ومنه $p(0)$ صحيحة .

2 نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1} - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

لدينا (1.3) $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$ ومن الفرض التراجع لدينا $u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ فإن $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ أي $u_{n+1} - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ أي أن

$p(n+1)$ صحيحة

اذن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$:

لدينا $0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - 1 = 0$ أي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

4. المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$

/ البرهان على أن (v_n) متتالية هندسية :

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{2u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1}{2 \cdot \frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1} = \frac{\frac{3u_n - 1 - 2u_n}{2u_n}}{\frac{3u_n - 1 - 2u_n}{u_n}} = \frac{\frac{u_n - 1}{2u_n}}{\frac{u_n - 1}{u_n}} = \frac{1}{2} v_n$$

ومنه $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$ ومنه $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{2u_{n+1} - 1} = \frac{1}{2} v_n$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{u_0 - 1}{2u_0 - 1} = \frac{1}{3}$

ب / كتابة عبارة v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{3 \times 2^n}$$

01

$$u_n = \frac{\frac{1}{3 \times 2^n} - 1}{2 \frac{1}{3 \times 2^n} - 1} = \frac{1 - 3 \times 2^n}{2 - 3 \times 2^n} \quad \text{ومنه } u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1} \quad \text{تكافئ } v_n(2u_n - 1) = v_n - 1 \quad \text{تكافئ } v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$$

01

(ج) حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3 \times 2^n} - 1}{2 \frac{1}{3 \times 2^n} - 1} = 1 \quad \text{لدينا} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \quad \text{ومنه}$$

02

5. حساب S_n بدلالة n حيث

$$S_n = \frac{v_0 - 1}{u_0} + \frac{v_1 - 1}{u_1} + \frac{v_2 - 1}{u_2} + \dots + \frac{v_n - 1}{u_n}$$

نضع (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $w_n = \frac{v_n - 1}{u_n}$ ومنه $w_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$ ومنه $w_n = 2v_n - 1$ ومنه $S_n = \frac{v_0 - 1}{u_0} + \frac{v_1 - 1}{u_1} + \frac{v_2 - 1}{u_2} + \dots + \frac{v_n - 1}{u_n}$

تكافئ $S_n = 2v_0 - 1 + 2v_1 - 1 + 2v_2 - 1 + \dots + 2v_n - 1$

تكافئ $S_n = 2(v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n) - 1 - 1 - \dots - 1$ ومنه $S_n = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 1(n+1)$ إذن $S_n = 4 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - 1(n+1)$

20

التمرين الثاني: الأجزاء I II III منفصلة

02

I. متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث : $\begin{cases} w_1 + w_3 = 30e \\ \ln(w_2) - \ln(w_4) + 2\ln 3 = 0 \end{cases}$

(أ) تعيين w_0 وأساس q .

بما أن (w_n) متتالية هندسية فإن $w_n = w_0 q^n$ ومنه $w_1 = w_0 q$ ، $w_2 = w_0 q^2$ ، $w_3 = w_0 q^3$ ، $w_4 = w_0 q^4$

تكافئ $\begin{cases} w_0(q + q^3) = 30e \\ \ln\left(\frac{w_0 q^2}{w_0 q^4}\right) = -2\ln 3 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} w_0 q + w_0 q^3 = 30e \\ \ln(w_0 q^2) - \ln(w_0 q^4) + 2\ln 3 = 0 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} w_1 + w_3 = 30e \\ \ln(w_2) - \ln(w_4) + 2\ln 3 = 0 \end{cases}$

نحل المعادلة (2) نجد $q = 3$ أو $q = -3$ وبما أن (w_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما فإن $q = 3$ وبتعويض في المعادلة (1) نجد $w_0 = e$

(ب) w_n عن بدلالة n .

$$w_n = w_0 q^n = e \times 3^n$$

01

02

II. نعتبر المتتالية (u_n) و (v_n) المتتالية المعرفتان على بـ : $v_n = \frac{u_n + \alpha}{u_n + 1}$ ، $u_0 = \frac{1}{2}$

حتى تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ فإن (1) $v_{n+1} = \frac{1}{4} v_n = \frac{1}{4} \times \frac{u_n + \alpha}{u_n + 1}$ ومن جهة

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + \alpha}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{3u_n + 2}{u_n + 2} + \alpha}{\frac{3u_n + 2}{u_n + 2} + 1} = \frac{(3 + \alpha)u_n + 2 + 2\alpha}{4u_n + 4} = \frac{1}{4} \times \frac{(3 + \alpha)u_n + 2 + 2\alpha}{u_n + 1}$$

	$\alpha = -2 \text{ نجد (2) و (1) بالمطابقة بين } v_{n+1} = \frac{1}{4} \times \frac{(3+\alpha)u_n + 2 + 2\alpha}{u_n + 1} \dots (2)$
02	1. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $u_0 = 1$ ، $3u_{n+1} = 2u_n + n + 3$. 1. حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 و تخميننا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) . لدينا : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$ $u_3 = \frac{2}{3}u_2 + \frac{2}{3} + 1 = \frac{89}{27}$ ، $u_2 = \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{22}{9}$ ، $u_1 = \frac{2}{3}u_0 + \frac{0}{3} + 1 = \frac{5}{3}$ بما أن $u_0 < u_1 < u_2$ فإن u_0 متزايدة تماما
02	2. (أ) البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq n + 3$: نسعي $p(n)$ الخاصية : $u_n \leq n + 3$ 1 من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 1$ و $1 < 3$ ومنه $p(0)$ صحيحة . 2 نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $u_n \leq n + 3$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1} \leq n + 4$ لدينا $u_n \leq n + 3$ ومنه $\frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3}n + 2$ ومنه $\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \leq \frac{2}{3}n + 2 + \frac{1}{3}n + 1$ ومنه $\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \leq n + 4$ أي $u_{n+1} \leq n + 4$ اذن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n (ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) . من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$ ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n \leq n + 3$ ومنه $-u_n \geq -n - 3$ ومنه $n + 3 - u_n \geq 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n \geq 0$ أي $\frac{1}{3}(n + 3 - u_n) \geq 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة .
02	3. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = u_n - n$: أ / البرهان على أن (v_n) متتالية هندسية : من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1} - n - 1 = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1$ $= \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n) = \frac{2}{3}v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 0 = 1$ ب / كتابة عبارة v_n بدلالة n $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ * استنتاج u_n بدلالة n $u_n = v_n + n$ تكافئ $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$ ومنه
01	ت/ نهاية المتتالية (u_n) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + n\right) = +\infty$ لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$
01	4. حساب S_n بدلالة n حيث : $S_n = (u_0)^2 + (u_1 - 1)^2 + (u_2 - 2)^2 + \dots + (u_n - n)^2$ بوضع $t_n = (u_n - n)^2 = v_n^2 = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^2 = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^n$ ومنه

01.5	$S_n = t_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{4}{9}} \right) = \frac{9}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1} \right)$ (t_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ وحدها الأول $t_0 = 1$ ومنه
01.5	- حساب S'_n بدلالة n حيث: $S'_{112} = Ln(v_7 \times v_8 \times v_{112})$ $S'_{112} = Ln(v_7 \times v_8 \times v_{112}) = S'_{112} = Ln(v_0 q^7 \times v_0 q^8 \times v_0 q^{112})$ $= Ln(q^{7+8+.....+112}) = Ln(q^{53(7+112)}) = 6307 Ln \frac{2}{3}$