

الفرض الأول للفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين

(I) g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = -4 + (4 - 2x)e^x$

(1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر a حيث $1,59 < a < 1,60$

(3) عين، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$

(II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x-2}{e^x-2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بين أن (C_f) يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتاهما على الترتيب $y = -1$ و $y = 0$

(2) (أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 2x)^2}$

(ب) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

(ج) احسب $f(1)$ ، ثم استنتج، حسب قيم x ، إشارة $f(x)$

(3) (أ) بين أن $f(a) = -1 + \frac{1}{a-1}$ ، حيث a هو العدد المعرف في السؤال 2 من الجزء I

(ب) استنتج حصر العدد $f(a)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2})

(ج) ارسم (C_f) .

(4) عين قيم الوسيط الحقيقي m ، حتى تقبل المعادلة $(m+1)(e^x - 2x) = 2x - 2$ حلين مختلفين في الإشارة.

(5) h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = [f(x)]^2$

(أ) احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثم استنتج إشارة $h'(x)$

(ب) شكل جدول تغيرات الدالة h .

تصحيح الفرض الأول للفصل الأول في مادة الرياضيات

حل التمرين

(I) g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = -4 + (4 - 2x)e^x$ (1) دراسة اتجاه تغير الدالة g :الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = (-2)(e^x) + (e^x)(4 - 2x) = e^x(-2 + 4 - 2x) = e^x(2 - 2x)$ إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2 - 2x)$ لأن $e^x > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[1; +\infty[$

✓ تشكيل جدول تغيراتها:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \end{cases} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -4 + (4 - 2x)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -4 + 4e^x - 2xe^x = -4$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - 2x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -4 + (4 - 2x)e^x = -\infty$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	-4	$-4 + 2e$	$-\infty$

(2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $1,59 < \alpha < 1,60$:على المجال $]-\infty; 1]$ الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما و $g(0) = 0$ ومنه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل معدوم.على المجال $[1; +\infty[$ الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما وبالأخص على المجال $[1,59; 1,60]$ و $g(1,59) \simeq 0,2$ و $g(1,60) \simeq -0,03$ ومنه $g(1,59) \times g(1,60) < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة للمعادلة $g(x) = 0$ حل وحيد α حيث $1,59 < \alpha < 1,60$ (3) تعين ، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$: من جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$	$-$

(II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{2x-2}{e^x-2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) تبين أن (C_f) يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاريين معادلتها على الترتيب $y = -1$ و $y = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0 \end{array} \right. \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-2}{e^x-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}-2\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-\frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x}-2} = -1$$

(C_f) يقبل عند $-\infty$ مستقيم مقارب معادلته $y = -1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \end{array} \right. \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-2}{e^x-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}-2\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-\frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x}-2} = 0$$

(C_f) يقبل عند $+\infty$ مستقيم مقارب معادلته $y = 0$

(2) أ) برهان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{2(e^x-2x) - (e^x-2)(2x-2)}{(e^x-2x)^2} = \frac{2e^x-4x-2xe^x+2e^x+4x-4}{(e^x-2x)^2} = \frac{(4-2x)e^x-4}{(e^x-2x)^2} = \frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$$

ب) استنتاج إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$	0	a	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن $(e^x-2x)^2 > 0$ ومنه

✓ تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	a	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$	-1	-2	$f(a)$	0

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

(3) حساب $f(1)$ ، ثم استنتاج، حسب قيم x ، إشارة $f(x)$: $f(1) = 0$

(4) أ) تبيين أن $f(\alpha) = -1 + \frac{1}{\alpha-1}$ حيث α هو العدد المعروف في السؤال 2 من الجزء I :

$$\text{بتعويض (2) في (1) نجد} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(\alpha) = \frac{2\alpha-2}{e^\alpha-2\alpha} \dots\dots\dots (1) \\ e^\alpha = \frac{4}{4-2\alpha} \dots\dots\dots (2) \end{array} \right. \text{يكافئ} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(\alpha) = \frac{2\alpha-2}{e^\alpha-2\alpha} \\ -4 + (4-2\alpha)e^\alpha = 0 \end{array} \right. \text{يكافئ} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(\alpha) = \frac{2\alpha-2}{e^\alpha-2\alpha} \\ g(\alpha) = 0 \end{array} \right.$$

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha-2}{\frac{4}{4-2\alpha}-2\alpha} = \frac{2\alpha-2}{\frac{4\alpha^2-8\alpha+4}{4-2\alpha}} = (2\alpha-2) \left(\frac{4-2\alpha}{4\alpha^2-8\alpha+4} \right) = \frac{(2\alpha-2)(4-2\alpha)}{(2\alpha-2)^2} = \frac{(4-2\alpha)}{(2\alpha-2)} = -1 + \frac{1}{\alpha-1}$$

ب) استنتاج حصر العدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}) :

$$\text{لدينا } 1,59 < \alpha < 1,60 \text{ يكافئ } 0,59 < \alpha-1 < 0,60 \text{ يكافئ } \frac{1}{0,60} < \frac{1}{\alpha-1} < \frac{1}{0,59} \text{ يكافئ } -1 + \frac{1}{0,60} < -1 + \frac{1}{\alpha-1} < -1 + \frac{1}{0,59}$$

$$\text{ومنه } 0,67 < f(\alpha) < 0,69$$

ج) ارسم (C_f) . في آخر الصفحة

(5) تعيين قيم الوسيط الحقيقي m ، حتى تقبل المعادلة $2x-2 = (e^x-2x)(m+1)$ حلين مختلفين في الإشارة :

$$2x-2 = (e^x-2x)(m+1) \text{ يكافئ } \frac{2x-2}{e^x-2x} = m+1 \text{ يكافئ } f(x) = m+1 \text{ ومنه عدد حلول المعادلة هو عدد فواصل نقط}$$

تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = m+1$

$$\text{لما } m+1 \in]-2; -1[\text{ للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة في } \mathbb{R} \text{ أي من أجل } m \in]-3; -2[$$

(6) h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = [f(x)]^2$

أ) حساب $h'(x)$ بدلالة كل من $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثم استنتاج إشارة $h'(x)$:

الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل $x \in \mathbb{R}$ $h'(x) = 2f'(x)f(x)$

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-$	0	$+$		
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	1	4	0	$[f(\alpha)]^2$	0

✓ تشكيل جدول تغيرات الدالة h :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1} x^2 = 1 \end{cases} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]^2 = 1$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \end{cases} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^2 = 0$$

