

الفرض الأول للثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

المدة : ساعة

المستوى : ثالثة علوم تجريبية

□ التمرين الأول:

f ، g ، h و k دوال معرفة على المجال $]1; +\infty[$ كما يلي:

$$k(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \text{ و } h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} , g(x) = \frac{x}{(x-1)^4} , f(x) = \frac{x}{(x-4)^4} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(1) \text{ بين أنه من أجل كل } x > 1 \text{ فإن: } g(x) = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^4}$$

$$(2) \text{ استنتج عبارة } G(x) \text{ حيث } G \text{ دالة أصلية للدالة } g \text{ على المجال }]1; +\infty[.$$

$$(3) \text{ أحسب } k'(x) \text{ من أجل كل } x \text{ من }]1; +\infty[.$$

$$(4) \text{ عيّن دالة أصلية للدالة } h \text{ على المجال }]1; +\infty[.$$

$$(5) \text{ أوجد دالة أصلية } F \text{ للدالة } f \text{ على }]1; +\infty[.$$

$$(6) \text{ استنتج الدالة الأصلية } F \text{ للدالة } f \text{ على }]1; +\infty[\text{ والتي تنعدم عند } 2.$$

□ التمرين الثاني:

$$\text{لتكن المتتالية } (U_n) \text{ المعرفة بـ: } U_0 = 0 \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n : U_{n+1} = \frac{1}{2 - U_n}.$$

$$(W_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ: } W_n = \frac{n}{n+1}.$$

$$(1) \text{ برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي } n : U_n = W_n.$$

$$(2) \text{ لتكن المتتالية } (V_n) \text{ المعرفة بـ: } V_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \text{ حيث } n \text{ عدد طبيعي غير معدوم.}$$

$$\text{أحسب } S_n \text{ بدلالة } n \text{ حيث } S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n.$$

التمرين الأول : f, g, h و k دوال معرفة على المجال $]1; +\infty[$ كما يلي:

$$k(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \text{ و } h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, g(x) = \frac{x}{(x-1)^4}, f(x) = \frac{x}{(x-4)^4} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(1) \text{ نبيّن أنه من أجل كل } x > 1 \text{ فإن: } g(x) = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^4} : g(x) = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^4} = \frac{x-1+1}{(x-1)^4} = \frac{x}{(x-1)^4} = g(x)$$

(2) استنتاج عبارة $G(x)$ حيث G دالة أصلية للدالة g على المجال $]1; +\infty[$.

$$\text{الدالة } g \text{ مستمرة على المجال }]1; +\infty[\text{ فهي تقبل دالة أصلية: } G(x) = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + C \text{ مع } C \text{ ثابت حقيقي.}$$

$$(3) \text{ حساب } k'(x) : \text{ الدالة } k \text{ قابلة للإشتقاق على المجال }]1; +\infty[\text{ ولدينا : } k'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2-1} + x}{\sqrt{x^2-1}}}{(x + \sqrt{x^2-1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

(4) تعيين دالة أصلية للدالة h على المجال $]1; +\infty[$.

من السؤال السابق نلاحظ أنه من أجل كل $x > 1$ فإن: $k'(x) = h(x)$ ومنه الدالة k أصلية للدالة h أي: $H(x) = k(x) + C$ مع C ثابت حقيقي.

(5) تعيين دالة أصلية F للدالة f على $]1; +\infty[$: نلاحظ أن الدالة f تكتب من الشكل: $f(x) = g(x) + h(x)$ وعليه $F(x) = G(x) + k(x) + C$

$$\text{ومنّه } F(x) = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + C \text{ مع } C \text{ ثابت حقيقي.}$$

(6) استنتاج الدالة الأصلية F للدالة f على $]1; +\infty[$ والتي تنعدم عند 2 : معناه $F(2) = 0$

$$\text{ومنّه } C = 0 \text{ لأن } F(2) = -\frac{1}{2(2-1)^2} - \frac{1}{3(2-1)^3} + \ln(2 + \sqrt{2^2 - 1}) + C = 0 \text{ إذن } -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + (2 + \sqrt{3}) + C = 0 \text{ ومنّه } C = \frac{5}{6} - \ln(2 + \sqrt{3})$$

$$\text{وعليه : } F(x) = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \frac{5}{6} - \ln(2 + \sqrt{3})$$

التمرين الثاني : لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بـ: $U_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{1}{2 - U_n}$.

$$(W_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ: } W_n = \frac{n}{n+1}$$

(1) نبرهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = W_n$. نسمي الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n : $P(n) : U_n = W_n$.
من أجل $n = 0$ لدينا: $U_0 = 0$ و $W_0 = \frac{0}{0+1} = 0$ ومنه $U_0 = W_0$ إذن $P(0)$ محققة.

نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل n عدد طبيعي كافي أكبر من أو يساوي 0 ونبرهن صحة $P(n+1)$.

$$P(n+1) : U_{n+1} = W_{n+1}$$

$$\text{لدينا: } U_{n+1} = \frac{1}{2 - U_n} = \frac{1}{2 - W_n} = \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{(n+1) + 1} = W_{n+1} \text{ ومنّه } U_{n+1} = W_{n+1}$$

ومنّه $P(n+1)$ محققة، وعليه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = W_n$.

لتكن المتتالية (V_n) المعرفة بـ: $V_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

(2) ليكن S_n مجموع حدود متتابعة من المتتالية (V_n) حيث $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$

(أ) حساب S_n بدلالة n .

$$\text{لدينا : } V_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln(n) - \ln(n+1) \text{ ومنّه}$$

$$S_n = \ln(1) - \ln(2) + \ln(2) - \ln(3) + \ln(3) - \ln(4) + \dots + \ln(n-1) - \ln(n) + \ln(n) - \ln(n+1)$$

$$= \ln(1) - \ln(n+1) = -\ln(n+1)$$