

التمرين: أ-

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$.
وليكن (C) المنحني الممثل للدالة f المعرفة على $[0; 2]$ بـ : $f(x) = x(2 - x)$
و (Δ) هو المستقيم الذي معادلته $y = x$

1- عين قيمة α بحيث تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2- نضع $\alpha = \frac{1}{8}$ باستعمال الرسم مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود

u_0, u_1, u_2 و u_3 مع توضيح الخطوط

✓ ضع تخميناً حول اتجاه تغيرات المتتالية (u_n) و تقاربها

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

✓ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

✓ إذا كانت (u_n) متقاربة.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $V_n = \ln(1 - u_n)$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب) اكتب بدلالة n .

ج) إستنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

د) احسب المجموع $S_n = (1 - u_0)(1 - u_1) \dots (1 - u_n)$

$$S'_n = \ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n$$

التمرين: ب-

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :
$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1- عين قيمة α بحيث تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2- نضع $\alpha = 1$ الشكل الموالي يمثل المنحني (C) للدالة f على المجال $[0; +\infty[$ والمستقيم (D) الذي معادلته $y = x$.

أنقل الشكل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 دون حسابها مبرزاً خطوط الرسم.

✓ ما تخمينك حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها ؟

(1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq \frac{5}{2}$

✓ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{2 - u_n}{u_n + 2}$

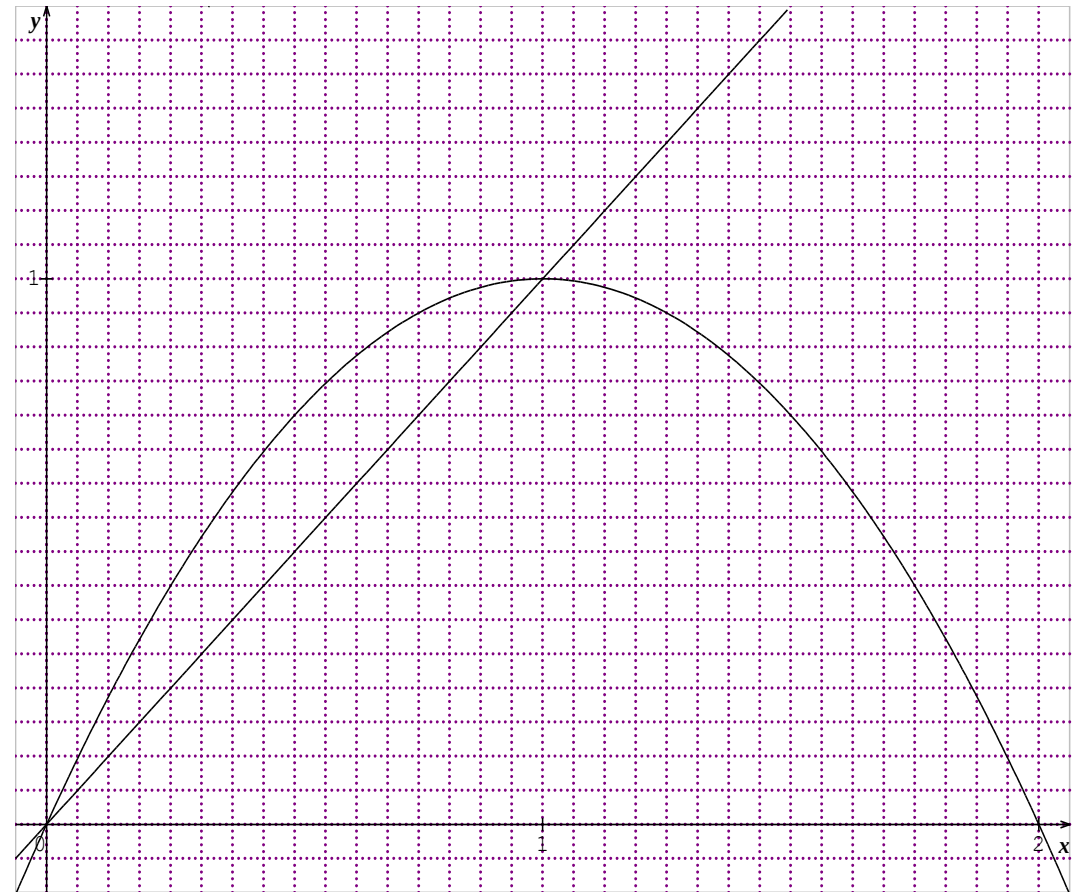
أ) احسب $2 - u_{n+1}$ و $u_{n+1} + 2$ ، ثم بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $-\frac{1}{3}$ ،

ب) اكتب بدلالة n .

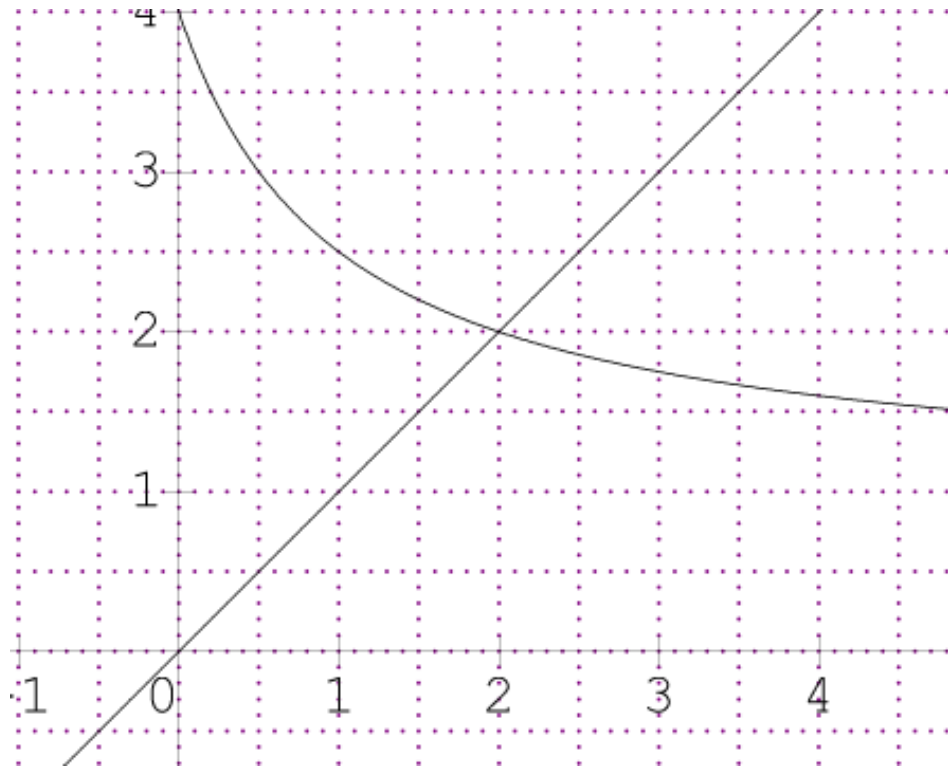
ب) عبر عن u_n بدلالة v_n ثم اكتب u_n بدلالة n . استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

$$\text{احسب } S_n = \frac{4}{u_0 + 2} + \frac{4}{u_1 + 2} + \dots + \frac{4}{u_n + 2}$$

التمرين: أ-



التمرين: ب-



U_n	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$U_{n+1}-U_n$	$-$	0	$+$	0	$-$

بما أن $0 < u_n < 1$ فإن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

بما أن متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فإنها متقاربة.

(1) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $V_n = \ln(1-u_n)$ ،

(أ) بيان أن المتتالية (v_n) هندسية

$$V_{n+1} = \ln(1-u_{n+1}) = \ln(1-u_n(2-u_n))$$

$$= \ln(1-2u_n+u_n^2) = \ln(1-u_n)^2 = 2V_n$$

$$V_0 = \ln(1-u_0) = \ln\left(\frac{7}{8}\right) \text{ و } q=2 \text{ ومنه } (v_n) \text{ م ه أساسها}$$

$$v_n = \ln\left(\frac{7}{8}\right) 2^n \quad \text{ب) كتابة } v_n \text{ بدلالة } n$$

(ج) إستنتج عبارة u_n بدلالة n

$$\text{لدينا } V_n = \ln(1-u_n) \text{ ومنه } e^{V_n} = 1-u_n \text{ ومنه } u_n = 1-e^{V_n}$$

$$u_n = 1-e^{\ln\left(\frac{7}{8}\right) 2^n} \text{ ومنه } u_n = 1-e^{V_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = -\infty \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1-e^{\ln\left(\frac{7}{8}\right) 2^n} = 1$$

(د) احسب المجموع $S_n = (1-u_0)(1-u_1).....(1-u_n)$

$$\text{لدينا } e^{V_n} = (1-u_n) \text{ ومنه}$$

$$S_n = e^{V_0} e^{V_1} e^{V_n} = e^{V_0+V_1+...+V_n} = e^{\ln\left(\frac{7}{8}\right) (2^{n+1}-1)}$$

$$S'_n = \ln v_0 + \ln v_1 + + \ln v_n$$

$$= \ln[v_0 \times v_1 \times \times v_n]$$

$$\text{لدينا } v_n = \ln\left(\frac{7}{8}\right) 2^n \text{ ومنه}$$

$$S'_n = \ln\left[\ln\left(\frac{7}{8}\right) 2^0 \times \ln\left(\frac{7}{8}\right) 2^1 \times ... \times \ln\left(\frac{7}{8}\right) 2^n\right]$$

$$= \ln\left[\ln\left(\frac{7}{8}\right) \times \ln\left(\frac{7}{8}\right) ... \times \ln\left(\frac{7}{8}\right) \times 2^0 \times 2^1 \times ... \times 2^n\right]$$

$$= \ln\left[\left(\ln\left(\frac{7}{8}\right)\right)^{n+1} \times 2^{0+1+2+...+n}\right]$$

$$= \ln\left[\left(\ln\left(\frac{7}{8}\right)\right)^{n+1} \times 2^{\frac{n+1}{2}n}\right]$$

انتهى بالتوفيق للجميع

التمرين أ

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي

$$u_{n+1} = u_n(2-u_n) \quad , \quad n$$

وليكن (C) المنحني الممثل للدالة f المعرفة على $[0; 2]$ بـ :

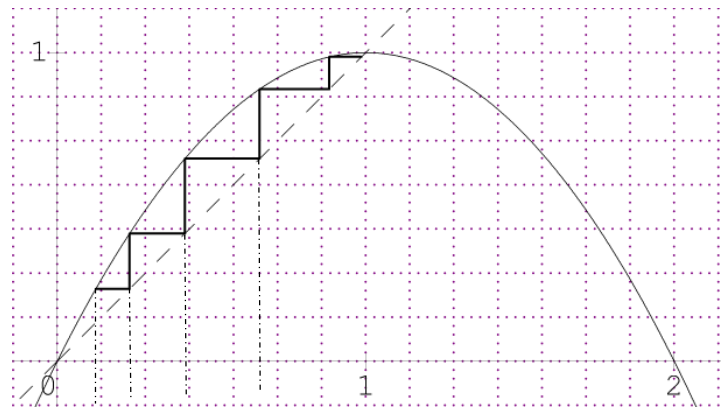
$$f(x) = x(2-x) \quad \text{و} \quad (\Delta) \text{ هو المستقيم الذي معادلته } y=x$$

1- تعيين قيمة α بحيث تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

$$\text{المتتالية } (u_n) \text{ ثابتة يكافئ } u_{n+1} = u_n = u_0 = \alpha$$

$$\alpha = \alpha(2-\alpha) \quad \text{ومنه} \quad \alpha^2 - \alpha = 0 \quad \text{أو} \quad \alpha = 0 \quad \text{أو} \quad \alpha = 1$$

2- نضع $\alpha = \frac{1}{8}$ لتمثيل على حامل محور الفواصل الحدود



$$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3$$

تخمينا حول إتجاه تغيرات المتتالية (u_n) و تقاربها

بما أن $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ فإنها متزايدة ومتقاربة نحو العدد 2.

1- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

لدينا $f'(x) = -2x+2$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $[0;1]$

التحقق من أجل $n=0$ $u_0 = \frac{1}{8}$ ومنه $0 < u_0 < 1$

ومنه الخاصية محققة

فرض صحة الخاصية من أجل $n \in \mathbb{N}$ $0 < u_n < 1$

نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $0 < u_{n+1} < 1$

لدينا $0 < u_n < 1$ ومنه $f(0) < f(u_n) < f(1)$

$$\text{ومنه } 0 < u_{n+1} < 1$$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه $n \in \mathbb{N}$ $0 < u_n < 1$

- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$$u_{n+1} - u_n = u_n(2-u_n) - u_n = -u_n^2 + u_n = u_n(-u_n + 1)$$

التمرين: -ب-

لتكن $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$ الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ:

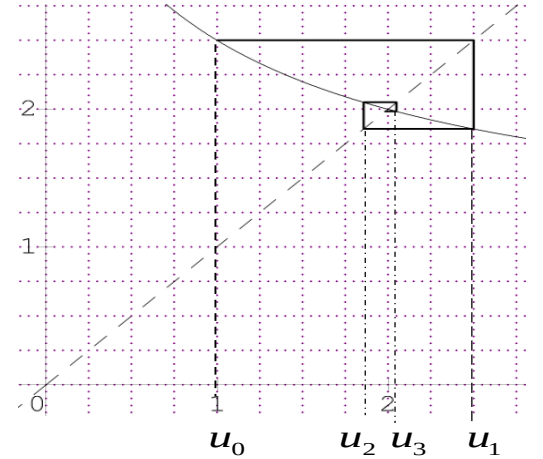
$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \text{بـ: } \mathbb{N} \text{ المعرفة على } (u_n) \text{ المتتالية}$$

1- تعيين قيمة α بحيث تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

المتتالية (u_n) ثابتة يكافئ $u_{n+1} = u_n = u_0 = \alpha$ ومنه

$$\alpha = \frac{\alpha+4}{\alpha+1} \quad \alpha^2 - 4 = 0 \quad \text{ومنه } \alpha = 2 \text{ أو } \alpha = -2$$

تمثيل على محور الفواصل الحدود



تخمين اتجاه تغير: المتتالية (u_n) غير رتيبة و تقاربة نحو 2

(1) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq \frac{5}{2}$

$$u_{n+1} = \frac{u_n+4}{u_n+1} = \frac{u_n+1+3}{u_n+1} = 1 + \frac{3}{u_n+1}$$

التحقق من أجل $n=0$ $u_0=1$ ومنه $1 \leq u_0 \leq \frac{5}{2}$

ومنه الخاصية محققة

فرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل $n \in \mathbb{N}$ أي $1 \leq u_n \leq \frac{5}{2}$

نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $1 \leq u_{n+1} \leq \frac{5}{2}$

$$\frac{6}{7} \leq \frac{3}{u_n+1} \leq \frac{3}{2} \quad \text{ومنه } \frac{2}{7} \leq \frac{1}{u_n+1} \leq \frac{1}{2} \quad \text{ومنه } 2 \leq u_n+1 \leq \frac{7}{2}$$

$$\frac{13}{7} \leq u_{n+1} \leq \frac{5}{2} \quad \text{ومنه } \frac{6}{7} + 1 \leq 1 + \frac{3}{u_n+1} \leq 1 + \frac{3}{2}$$

$$1 \leq \frac{13}{7} \leq u_{n+1} \leq \frac{5}{2} \quad \text{ومنه}$$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه $n \in \mathbb{N}$ $1 \leq u_n \leq \frac{5}{2}$

- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n+4}{u_n+1} - u_n = \frac{-u_n^2+4}{u_n+1}$

U_n	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$U_{n+1}-U_n$	$-$	0	$+$	0	$-$

بما أن $1 \leq u_n \leq \frac{5}{2}$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة على المجال $[0; 2]$

ومتناقصة على $\left[2; \frac{5}{2}\right]$

استنتج أنها متقاربة المتتالية (u_n) متزايدة على المجال $[0; 2]$ ومحدودة من

الأعلى ومتناقصة على $\left[2; \frac{5}{2}\right]$ ومحدودة من الأسفل فإنها متقاربة .

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{2-u_n}{u_n+2}$

(أ) حساب $2 - u_{n+1}$ و $u_{n+1} + 2$ ،

$$v_{n+1} = \frac{2-u_{n+1}}{u_{n+1}+2} = \frac{2 - \frac{u_n+4}{u_n+1}}{\frac{u_n+4}{u_n+1} + 2}$$

$$= \frac{u_n-2}{3u_n+6} = \frac{-1}{3} \times \frac{2-u_n}{u_n+2} = \frac{-1}{3} v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{3}$

$$v_n = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} \right)^n \quad \text{(ب) كتاب } v_n \text{ بدلالة } n$$

(ب) عبر عن u_n بدلالة v_n

$$v_n u_n + u_n = 2 - 2v_n \quad v_n(u_n + 2) = 2 - u_n$$

$$u_n(v_n + 1) = 2 - 2v_n \quad \text{ومنه } v_n u_n + 2v_n + u_n = 2$$

$$u_n = \frac{2 - 2v_n}{v_n + 1} \quad \text{ومنه}$$

$$u_n = \frac{2 - 2 \cdot \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} \right)^n}{\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} \right)^n + 1} \quad \text{كتابة } u_n \text{ بدلالة } n$$

استنتج نهاية المتتالية (u_n)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0 \quad \text{لأن } -1 < q < 1 \quad \text{ومنه } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$$

$$S_n = \frac{4}{u_0+2} + \frac{4}{u_1+2} + \dots + \frac{4}{u_n+2} \quad \text{حساب}$$

$$v_n = \frac{2-u_n}{u_n+2} = -\frac{u_n-2}{u_n+2} = -\frac{u_n+2-4}{u_n+2} = -1 + \frac{4}{u_n+2} \quad \text{لدينا}$$

$$v_n + 1 = \frac{4}{u_n+2} \quad \text{ومنه } v_n = -1 + \frac{4}{u_n+2} \quad \text{ومنه}$$

$$S_n = v_0 + 1 + v_1 + 1 + \dots + v_n + 1$$

$$= 1 + 1 + \dots + 1 + v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$= (n+1) + \left[v_0 \frac{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{3}} \right] = (n+1) + \left[- \right]$$

مع ثغيت

انتهى بالتوفيق والتميز للجمع