

نوفمبر 2022

المستوى: الثالثة لغات أجنبية، آداب و فلسفة

المدة: ساعة

فرض الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين 1

(I) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$u_n = -6n + 1$$

(1) بين أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها .

(2) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) هل 2023 حد من حدود المتتالية (u_n) ؟

(4) هل 2021 - حد من حدود المتتالية (u_n) ؟

(5) احسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

ثم استنتج المجموع S_1 حيث: $S_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_{337}$

(6) عين قيمة n علما أن $S_n = -15$

(II) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$v_n = 2u_n + 3$$

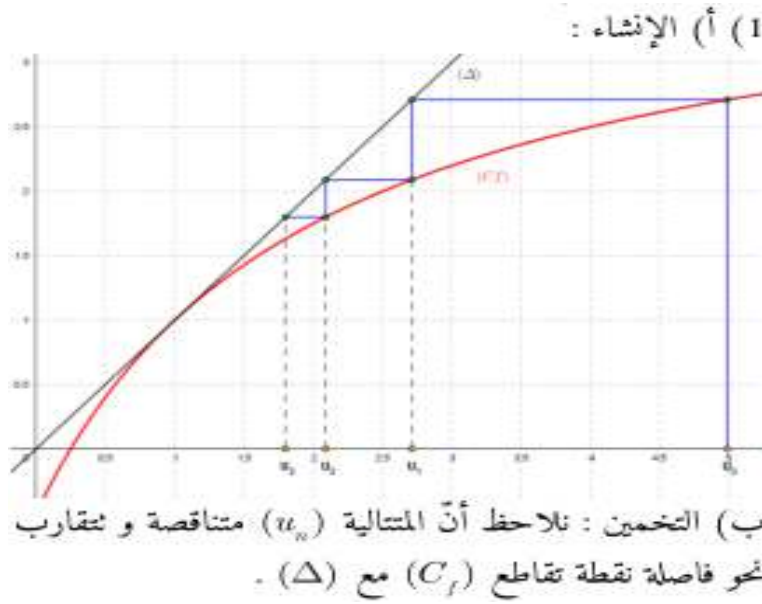
(1) احسب الحدود v_0 ، v_1 و v_2 .

(2) احسب المجموع S_2 حيث: $S_2 = v_0 + v_1 + \dots + v_{337}$

بالتوفيق

التصحيح النموذجي

رقم التمرين	الحل	التنقيط
التمرين الأول	(1) المتتالية (V_n) هندسية. صحيح التبرير: $V_{n+1} = U_{n+2} - U_{n+1} = \frac{1}{3}U_{n+1} + \frac{2}{3}U_n - U_{n+1} = -\frac{2}{3}U_{n+1} + \frac{2}{3}U_n = -\frac{2}{3}(U_{n+1} - U_n) = -\frac{2}{3}V_n$ ومنه المتتالية (V_n) هندسية أساسها $q = -\frac{2}{3}$. (2) المتتالية (W_n) ثابتة. صحيح التبرير: $W_{n+1} = U_{n+2} + \frac{2}{3}U_{n+1} = \frac{1}{3}U_{n+1} + \frac{2}{3}U_n + \frac{2}{3}U_{n+1} = U_{n+1} + \frac{2}{3}U_n = W_n$ (3) من أجل كل عدد طبيعي n، فإن: $U_n = \frac{3}{5}(W_n - V_n)$. صحيح التبرير: لدينا: $U_n = \frac{3}{5}(W_n - V_n)$ ومنه $W_n - V_n = U_{n+1} + \frac{2}{3}U_n - (U_{n+1} - U_n) = \frac{5}{3}U_n$. (4) المتتالية (U_n) متباعدة. خطأ التبرير: المتتالية (V_n) هندسية معناه $V_n = \underbrace{V_0}_{U_1 - U_0 = 1} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ و $W_n = W_0 = U_1 + \frac{2}{3}U_0 = 1$ متتالية ثابتة: $U_n = \frac{3}{5} \left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right) = \frac{3}{5}$ وعليه $U_n = \frac{3}{5}(W_n - V_n) = \frac{3}{5} \left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)$ ومنه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{5} \left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right) = \frac{3}{5}$ ومنه المتتالية (U_n) متقاربة.	



(1) (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = 1/3$

و حدها الأول $1/4$

ب) (*) عبارة v_n بدلالة n : $v_n = \frac{1}{3}n + \frac{1}{4}$

(*) عبارة u_n بدلالة n : $u_n = \frac{1}{u_n - 1}$ ، أي :

· $u_n - 1 = \frac{1}{v_n}$ ، أي : $u_n = \frac{1}{v_n} + 1$

و منه : $u_n = \frac{1}{\frac{1}{3}n + \frac{1}{4}} + 1$

ج) حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\frac{1}{3}n + \frac{1}{4}} + 1 \right] = 1$$

(4) حساب المجموع S_1 بدلالة n : $S_1 = \frac{1}{u_0 - 1} + \frac{1}{u_1 - 1} + \dots + \frac{1}{u_n - 1}$

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{6} + \frac{n+1}{4}$$

التمرين
الثاني

1. حساب u_1, u_2, u_3 .

$$u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 = \frac{1}{3} \times \frac{10}{3} + 2 = \frac{28}{9}, u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 2 = \frac{1}{3} \times 4 + 2 = \frac{10}{3}, u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 2 = \frac{1}{3} \times 6 + 2 = 4$$

التخمين بالنسبة لاتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$ يبدو أن المتتالية (u_n) متناقصة.

(2) التحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{3}(u_n - 3)$

(3) اتجاه تغير المتتالية (u_n) : متناقصة

(1) عين قيمة α بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + \alpha = \frac{1}{3}u_n + 2 + \alpha \\ &= \frac{1}{3}(v_n - \alpha) + 2 + \alpha \\ &= \frac{1}{3}v_n + 2 + \frac{2}{3}\alpha \end{aligned}$$

(v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ إذا وفقط إذا كان $2 + \frac{2}{3}\alpha = 0$ أي $\alpha = -3$.

فيكون حدها الأول $v_0 = u_0 - 3 = 6 - 3 = 3$.

ب - كتابة v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

استنتاج كتابة u_n بدلالة n .

$$u_n = v_n + 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 3$$

أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 3 \right) = 3 \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0 \text{ لدينا}$$

و منه المتتالية متقاربة .

التمرين
3

ج) حساب الجداء: $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

$$P_n = 3^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$