

ملاحظة: تؤخذ بعين الاعتبار، الإجابات الدقيقة والواضحة، كما يمنع معنا باتا استعمال القلم الأحمر

← التمرين

(I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2 - xe^{1-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ [03.00 ن]

ب- ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها [03.00 ن]

2 أ- بين أن (C_f) نقطة إنعطاف Ω يطلب تعيين إحداثياتها [01.50 ن]

ب- اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة Ω [01.00 ن]

ج- اكتب معادلة المماس (T') لـ (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الترتيب، ثم تحقق أن [01.50 ن]

$$(T) \perp (T')$$

3 احسب $f(-1)$ ، ثم أنشئ (C_f) [02.50 ن]

4 ناقشا بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلولة المعادلة $\ln f(x) - \ln f(m) = 0$ [02.00 ن]

(II) f_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_n(x) = 2 - x^n e^{1-x}$

(حيث: $n \in \mathbb{N}$ ، مع: $n \geq 2$)، و (C_n) تمثيلها البياني في المستوى السابق

1 بين أن جميع المنحنيات (C_n) تمر من نقطتين ثابتتين يُطلب تعيينهما [02.00 ن]

2 احسب نهايتي الدالة f_n عند $+\infty$ و $-\infty$ (ناقش حسب شفعية n) [01.50 ن]

3 احسب $f'_n(x)$ ، ثم حدّد حسب شفعية n اتجاه تغير الدالة f_n وشكل جدول تغيراتها [02.00 ن]

"ومن يتعيب صعود الجبال... يعش أبداً الكهريمن الجفر"

بالتوفيق للجميع

(I)

1. حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - xe^{-x}e^1) = \boxed{2}$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x}) = 0$$

• التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 2$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$$

ب- دراسة تغيرات الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا من أجل كل $x \in D_f$:

$$f'(x) = -e^{1-x} + xe^{1-x} = (x-1)e^{1-x}$$

لدينا: $e^{1-x} > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x-1)$:

لدينا: $x-1 = 0$ ومنه: $x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	1	2

2. اتبين أن (C_f) نقطة انعطاف Ω :

لدينا f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$f''(x) = e^{1-x} - (x-1)e^{1-x} = (2-x)e^{1-x}$$

لدينا: $e^{1-x} > 0$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة $(2-x)$:

لدينا: $2-x = 0$ ومنه: $x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-

لدينا: المشتقة الثانية تنعدم وتغير إشارتها لما $x = 2$

ومنه: (C_f) يقبل نقطة انعطاف $\Omega\left(2; \frac{2e-2}{e}\right)$

ب- كتابة معادلة (T) :

$$(T): y = f'(2)(x-2) + f(2) = \boxed{e^{-1}x - 4e^{-1} + 2}$$

ج- كتابة معادلة (T') :

$$(T'): y = f'(0)(x-0) + f(0) = \boxed{-ex + 2}$$

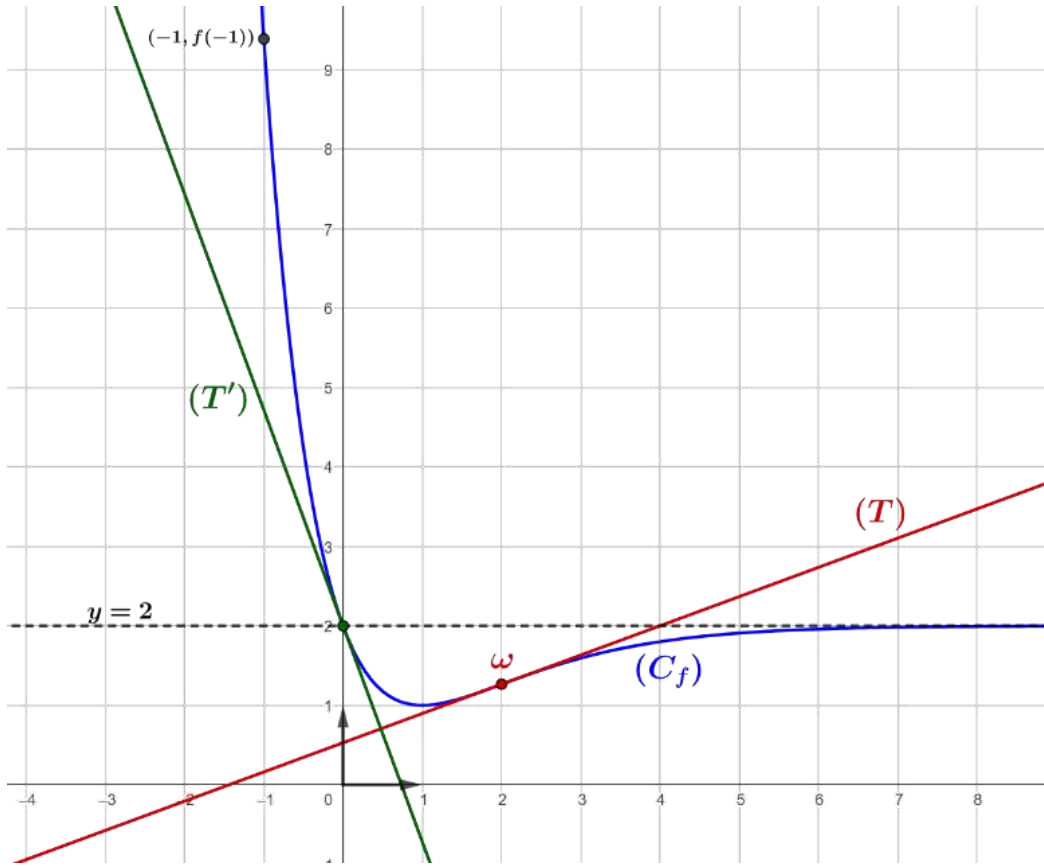
- التحقق أن $(T) \perp (T')$:

مستقيمان متعامدان معناه ضرب معاملي توجيهيهما يساوي -1

$$\text{لدينا: } a_{(T)} \times a_{(T')} = -e \times e^{-1} = -1 \quad \text{إذن } (T) \text{ و } (T') \text{ متعامدان}$$

3. حساب $f(-1)$ ، وإنشاء (C_f) :

$$\text{لدينا: } f(-1) = 2 + e^2 \approx 9.38$$



④ المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلولة المعادلة $\ln(f(x)) - \ln(f(m)) = 0$:

لدينا: $\ln(f(x)) - \ln(f(m)) = 0 \dots (*)$

ومنه: $\ln(f(x)) = \ln(f(m))$

ومنه: $f(x) = f(m)$

حلول المعادلة (*) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمت ذات المعادلة $y = f(m)$ حيث $m \in \mathbb{R}$

المعادلة تقبل حل مضاعف موجب تماماً $m = 1$ لـ

المعادلة تقبل حلان موجبان تماماً $m \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$ لـ

المعادلة تقبل حل معدوم $m = 0$ لـ

المعادلة تقبل حل وحيد سالب تماماً $m =]-\infty; 0[$ لـ

(II)

① تبين أن جميع المنحنيات (C_n) تمر من نقطتين ثابتتين:

لدينا: $f_n(x) - f_{n+1}(x) = 0$

معناه: $2 - x^n e^{1-x} - 2 + x^{n+1} e^{1-x} = 0$

ومنه: $x^n e^{1-x} (-1 + x) = 0$

ومنه: $-1 + x = 0$ أو $x^n = 0$ لأن $e^{1-x} \neq 0$

ومنه: جميع المنحنيات (C_n) تمر من نقطتين ثابتتين هما $A(0; f(0))$ و $B(1; f(1))$

أي: من النقطتين $A(0; 2)$ و $B(1; 1)$

② حساب نهايتي الدالة f_n عند $+\infty$ و $-\infty$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - e \frac{x^n}{e^x} \right) = \boxed{2}$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^n}{e^x} \right) = 0$

لـ: $n = 2k + 1$ حيث: $k \in \mathbb{N}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \underbrace{x^n}_{-\infty} \underbrace{e^{1-x}}_{+\infty} \right) = \boxed{+\infty}$$

لما: $n = 2k$ حيث: $k \in \mathbb{N}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \underbrace{x^n}_{+\infty} \underbrace{e^{1-x}}_{+\infty} \right) = \boxed{-\infty}$$

③ حساب $f'_n(x)$:

لدينا: الدالة f_n قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا من أجل كل $x \in D_f$:

$$f'_n(x) = -nx^{n-1}e^{1-x} + x^n e^{1-x} = \boxed{x^n e^{1-x} \left(-\frac{n}{x} + 1 \right)}$$

- تحديد حسب شفعية n اتجاه تغير الدالة f_n وتشكيل جدول تغيراتها:

$$f'_n(x) = 0 \quad \text{لدينا:}$$

$$x^n e^{1-x} \left(-\frac{n}{x} + 1 \right) = 0 \quad \text{معناه:}$$

$$e^{1-x} > 0 \quad \text{لدينا:}$$

$$-\frac{n}{x} + 1 \quad \text{ولدينا:}$$

$$\frac{x-n}{x} = 0 \quad \text{معناه:}$$

$$x = n \quad \text{ومنه:}$$

$$x^n = 0 \quad \text{ولدينا:} \quad x^n = 0 \quad \text{معناه:}$$

لما n فردي لدينا: ◀

x	$-\infty$	0	n	$+\infty$
x^n	+	0	+	+
$-\frac{n}{x} + 1$	-	0	0	+
$f'_n(x)$	-	0	0	+
$f_n(x)$	$+\infty$		$f_n(n)$	2

لما n زوجي، لدينا: ◀

x	$-\infty$	0	n	$+\infty$
x^n	-	0	+	+
$-\frac{n}{x} + 1$	-	0	0	+
$f'_n(x)$	+	0	0	+
$f_n(x)$	$-\infty$		$f_n(n)$	2

♥ بالتوفيق للجميع في شهادة البكالوريا 2024 ♥