

2022 / 2021 :

التاريخ : 23 فيفري 2022 م

المستوى : نهائي الشعبة : رياضيات المدة : 02 سا 00 د

☆ فرض الطرائف الثاني في مادة الرياضيات ☆

للتمرين الأول : 06 نقاط

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} - 1 \end{array} \right. : \mathbb{N} \text{ ب : } \leftarrow \text{ لتكن } (u_n) \text{ متتالية عددية معرفة على } \mathbb{N}$$

(1) برهن بالتراجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq -\frac{3}{2}$.

(2) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ماذا تستنتج ؟

$$\leftarrow \text{ لتكن } (v_n) \text{ متتالية عددية معرفة على } \mathbb{N} \text{ ب : } v_n = 2u_n + \alpha \text{ ، حيث } \alpha \text{ عدد حقيقي .}$$

(1) عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

(2) أكتب عبارة v_n و u_n بدلالة n .

(3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_{n-1}^2$.

(4) أثبت أن : $\forall n \in \mathbb{N} : v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_{n-1} = 5^n \sqrt{3^{3(1-n)}}$.

للتمرين الثاني : 06 نقاط

$$\leftarrow \text{ لتكن } (w_n) \text{ متتالية عددية معرفة على } \mathbb{N}^* \text{ ب : } w_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$$

(1) بين أن $t \rightarrow (2-t)e^t$ دالة أصلية للدالة $t \rightarrow (1-t)e^t$ على المجال $[0;1]$.

(2) أحسب w_1 .

(3) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : w_{n+1} = (n+1)u_n - 1$.

(4) بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^* : w_n \geq 0$.

(5) بين أن $(1-t)^n e^t < (1-t)^n e$ ، إستنتج أن $w_n < \frac{e}{n+1}$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n$.

للتمرين الثالث : 08 نقاط

◀ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = e^{-x} \ln(1+e^x)$ و نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و فسر النتيجة بيانيا .

(2) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1+e^{-x})$.

(3) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و فسر النتيجة بيانيا .

◀ نعتبر الدالة g المعرفة على $[-1; +\infty[$ بـ : $g(t) = \frac{t}{t+1} - \ln(1+t)$.

(1) أدرس إتجاه تغير الدالة g على $[0; +\infty[$ ثم إستنتج إشارة $g(t)$ لما $t \in [0; +\infty[$.

(2) أحسب $f'(x)$ و أكتبها بدلالة $g(e^x)$.

(3) إستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(4) أرسم (C_f) منحنى الدالة f .

◀ لتكن φ دالة معرفة و مستمرة على $[0; 1]$ ، φ' دالتها المشتقة حيث φ' مستمرة على $[0; 1]$.

(1) أثبت أن : $\int_0^1 \varphi(x) dx = \varphi(1) - \int_0^1 x \varphi'(x) dx$.

◀ نفرض أن φ معرفة على $]-2; 2[$ بتمثيلها البياني و $\varphi(1) = \ln 3$ ،

$$\varphi'(x) = \frac{4}{4-x^2}$$

(1) أحسب المساحة A للحيز المحدد بمجموعة النقط $M(x; y)$ حيث

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ \varphi(x) \leq y \leq \ln 3 \end{cases}$$

