

المستوى: الثالثة علوم تجريبية

فيفري 2022

فرض الفصل الثاني في مادة الرياضيات

المدة : ساعتين.

التمرين 1

في كل مما يلي توجد اجابة صحيحة واحدة ، عينها مع التبرير:

(أ) مجموعة حلول المتراجحة : $\ln(x+2) + \ln(x-1) \leq 2 \ln 2$

(1) $[-2; 1]$; (2) $[1; 2]$; (3) $[-3; 2]$

(ب) نعتبر المعادلة التفاضلية : $3y - y' = 6 \dots (E)$

الحل الخاص للمعادلة (E) الذي يحقق : $f(-1)=0$ هو :

(1) $f(x) = -2e^{3(x+1)} + 2$; (2) $f(x) = -2e^{3x+1} + 2$;

(3) $f(x) = 3e^{2(x-1)} - 2$

(ج) دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ حيث :

$f(x) = (\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}$ ، الدالة المشتقة للدالة f معرفة ب:

(1) $f'(x) = 2 \left(\frac{\ln(x^3+1)}{x(\ln x)^2} \right)$; (2) $f'(x) = 2 \left(\frac{(\ln x)^3+1}{x(\ln x)^2} \right)$;

(3) $f'(x) = 2 \left(\frac{(\ln x+1)^3}{x(\ln x)^2} \right)$

التمرين 2

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.5 < \alpha < 2$.

(3) استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x .

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2+1}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ) احسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف ، فسر النتائج هندسيا .

ب) بين انه من اجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x^2+1)^2}$

ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$ و استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

(4) ارسم (T) و (C_f) .

(5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + m$$

(III) لتكن الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = \frac{|\ln x|}{x^2+1}$

اشرح كيف يمكن رسم (C_h) منحنى الدالة h اعتمادا على (C_f)

بالتوفيق.

التصحيح النموذجي

العلامة	الحل	رقم التمرين
	أ) مجموعة حلول المتراجحة : $\ln(x+2) + \ln(x-1) \leq 2 \ln 2$ (3) $[-3; 2]$ ب) نعتبر المعادلة التفاضلية : $3y - y' = 6$... (E) الحل الخاص للمعادلة (E) الذي يحقق : $f(-1)=0$ هو : $f(x) = -2e^{3(x+1)} + 2$ (1) ج) دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ حيث : $f(x) = (\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}$ ، الدالة المشتقة للدالة f معرفة ب: $f'(x) = 2 \left(\frac{(\ln x)^3 + 1}{x(\ln x)^2} \right)$ (2)	التمرين 1

(I) تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
النهايات

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 1+x^2 = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^2 \ln x = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 - 2 \ln x \right) = -\infty$$

الدالة المشتقة

$$g'(x) = 2x - 2 \left(2x \ln x + \frac{1}{x} x^2 \right) = 2x - 4x \ln x - 2x = -4x \ln x$$

إشارة الدالة المشتقة

$$\text{من أجل } x \in]0; 1[\text{، } \ln x < 0 \text{ ومنه } g'(x) > 0$$

$$\text{ومن أجل } x \in]1; +\infty[\text{، } \ln x > 0 \text{ ومنه } g'(x) < 0$$

اتجاه التغير

بالتالي الدالة g متزايدة تماماً على المجال $]0; 1[$ و متناقصة تماماً على المجال $]1; +\infty[$

جدول التغيرات

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$	1	2	$-\infty$

(2) نبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1.5 < \alpha < 2$.
مبرهنة القيم المتوسطة

(3) استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

(II) 1 أ) حساب النهايات عند حدود مجموعة التعريف و تفسير النتائج هندسيا.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x^2 + 1} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

تفسير النتائج هندسيا.

لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 0$ (محور الفواصل) بجوار $+\infty$.

ب) نبين انه من اجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x(x^2+1)^2}$$

لدينا من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $x(x^2+1)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$.

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; \alpha]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$.

جدول التغيرات

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

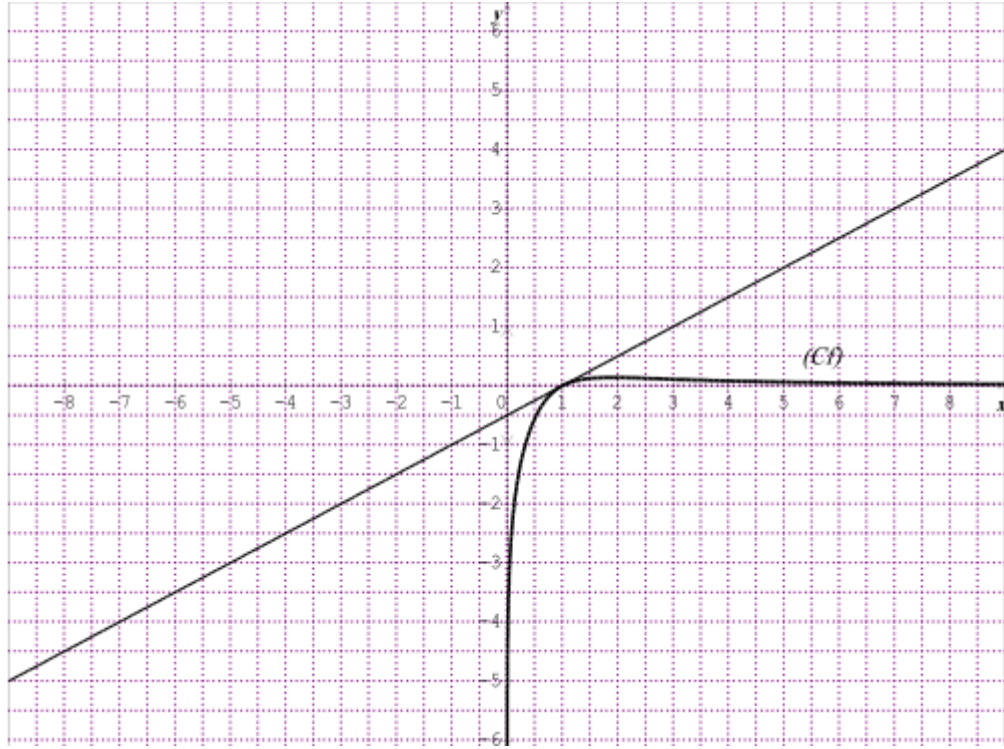
(2) نبين أن $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$

حصر للعدد $f(\alpha)$ $0,12 < f(\alpha) < 0,23$

(3) معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

$$y = \frac{1}{2}(x-1) + f(1) \quad \text{ومنهم } y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

(4) رسم (T) و (C_f) .



5. المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي

m ، عدد حلول المعادلة: $f(x) = \frac{1}{2}x + m$.

إذا كان $m < -\frac{1}{2}$ فإن المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $m = -\frac{1}{2}$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا مضاعفا.

إذا كان $m > -\frac{1}{2}$ فإن المعادلة ليس لها حلول.

(III) الشرح كيف يمكن رسم (C_h) منحنى الدالة h اعتمادا على (C_f)

$$\begin{cases} h(x) = f(x); x \in [1; +\infty[\\ h(x) = -f(x); x \in]0; 1] \end{cases}$$

على المجال $[1; +\infty[$ يكون (C_h) منطبق على (C_f)

على المجال $]0; 1]$ يكون (C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل.

