

الفرض الثاني للفصل الأولالتمرين:

I- لتكن f دالة معرفة على المجال $[0, +\infty[$ حيث: $f(x) = \frac{2x}{ex+1}$

(C_f) منحناها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ($\|\vec{i}\| = 10 \text{ cm}$)

والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

(1) أدرس اتجاه تغيرات الدالة f على المجال $[0, +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها

(2) أ) أدرس إشارة $f(x) - x$

ب) استنتج وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

(3) أرسم المستقيمين المقارب و (Δ) و (C_f)

II- لتكن المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب:
$$\begin{cases} U_0 = \frac{5}{4e} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

(1) مثل (دون حسابها) الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (U_n) مبرزاً خطوات التمثيل

(2) أعطى تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها

III- (1) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{2}{e} \left(1 - \frac{1}{eU_{n+1}}\right)$

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > \frac{1}{e}$

ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} - U_n = \frac{eU_n \left(\frac{1}{e} - U_n\right)}{eU_{n+1}}$

ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها

د) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

(2) نعتبر المتتالية العددية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $V_n = \frac{eU_n}{eU_n - 1}$

أ) بين أن المتتالية (V_n) هندسية أساسها 2, يطلب تعيين حدها الأول V_0

ب) عبر عن V_n و U_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

ج) أحسب S_n بدلالة n حيث: $S_n = \frac{1}{(eU_0 - 1)^2} + \frac{1}{(eU_1 - 1)^2} + \dots + \frac{1}{(eU_n - 1)^2}$