

الفرض المجروس الثاني في مادة الرياضيات

المدة : 75 دقيقة

⚠ تجنب الشطب و استعمال المصحح.

نصّ البُنىين:

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 - (1 + 2x)e^{2x}$

1 أحسب نهاية الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

2 أدرس إتجاه تغيّر الدالة g ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3 أحسب $g(0)$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f الدالة العددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

2 بين أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته .

3 أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

4 بين أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$

5 إستنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها .

6 بين أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β

حيث : $-3.05 < \alpha < -3$ و $0.75 < \beta < 0.8$.

7 بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة ديكارنية له .

8 أنشئ (T) , (Δ) و المنحنى (C_f) .

9 ناقش بياناً و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x) = x + m$

(III) لتكن h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x) = \frac{1 + 3x - e^{\frac{2}{x}}}{x}$

1 بين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

2 أحسب $h'(x)$ ثم إستنتج إتجاه تغيّر الدالة h و شكل جدول تغيّراتها .

التصحيح المفصل للفرض المحروس الثاني في مادة الرياضيات

I. لدينا g الدالة العددية المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - (1 + 2x)e^{2x}$

(1) حساب نهاية الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (2xe^{2x}) = 0 \end{cases} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [1 - (1 + 2x)e^{2x}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^{2x} - 2xe^{2x}) = 1$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 2x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \end{cases} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 - (1 + 2x)e^{2x}] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [-(1 + 2x)e^{2x}] = -\infty$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

حساب المشتقة: $g'(x) = -(2e^{2x} + 2(1 + 2x)e^{2x}) = (-4 - 4x)e^{2x}$

دراسة إشارة المشتقة $g'(x)$:

$g'(x) = 0$ يعني $(-4 - 4x)e^{2x} = 0$ ومنه $-4 - 4x = 0$ أي $x = -1$

جدول إشارة $g'(x)$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-

إذن الدالة g متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; -1]$ ومتناقصة تماماً على المجال $[-1; +\infty[$

تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	1	$g(-1) = 1.14$	$-\infty$

(3) حساب $g(0)$ ثم إستنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

$$g(0) = 1 - (1 + 2 \times 0)e^{2(0)} = 1 - 1 = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

II. f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$

(1) حساب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+3) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-xe^{2x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}(-2xe^{2x}) = 0 \end{cases} \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+3 - xe^{2x}) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x} - e^{2x}\right) = -\infty \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+3 - xe^{2x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{3}{x} - e^{2x}\right) = -\infty$$

(2) أ) تبيان أن المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته :

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+3)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+3 - xe^{2x} - x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-xe^{2x}) = 0$$

$$\text{لأن : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-xe^{2x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}(-2e^{2x}) = 0$$

ومنه المستقيم $y = x + 3$: (Δ) مقارب مائل للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ عند $-\infty$.

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة للمستقيم (Δ) :

$$\text{ندرس إشارة الفرق } f(x) - y = x + 3 - xe^{2x} - (x+3) = -xe^{2x}$$

$$\text{إشارة الفرق نفس إشارة } -x \text{ لأن } e^{2x} > 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	+	0	-
$f(x) - y$	+	0	-

الوضع النسبي للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة للمستقيم (Δ) :

إذا كان $x \in]-\infty; 0[$ فإن $(\mathcal{C}_f)$ يقع فوق المستقيم (Δ) .

إذا كان $x = 0$ فإن $(\mathcal{C}_f)$ يقطع المستقيم (Δ) .

إذا كان $x \in]0; +\infty[$ فإن $(\mathcal{C}_f)$ يقع تحت المستقيم (Δ) .

(3) أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x) = g(x)$:

$$\text{لدينا : } f'(x) = 1 - (e^{2x} + 2xe^{2x}) = 1 - (1 + 2x)e^{2x} = g(x)$$

$$\text{ومنه } f'(x) = g(x)$$

ب) إستنتاج إتجاه تغير الدالة f :

$$\text{إشارة } f'(x) \text{ من نفس إشارة } g(x)$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 0]$ ومتناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	3	$-\infty$

4(أ) تبيان أن $(\mathcal{C}_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β حيث $-3.05 < \alpha < -3$ و $0.75 < \beta < 0.8$:

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[-3.05; -3]$ ولدينا :

$$f(-3.05) = -3.05 + 3 - (-3.05)e^{2(-3.05)} = -0.04$$

$$\text{و } f(-3) = -3 + 3 - (-3)e^{2(-3)} = 0.01$$

أي $f(-3.05) \times f(-3) < 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-3.05 < \alpha < -3$.

و لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[0.75; 0.8]$ ولدينا :

$$f(0.75) = 0.75 + 3 - (0.75)e^{2(0.75)} = 0.39$$

$$\text{و } f(0.8) = 0.8 + 3 - (0.8)e^{2(0.8)} = -0.16$$

أي $f(0.75) \times f(0.8) < 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $0.75 < \beta < 0.8$.

وبالتالي $(\mathcal{C}_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β حيث $-3.05 < \alpha < -3$ و $0.75 < \beta < 0.8$.

ب) تبيان أن المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) :

$$\text{يعني } f'(x) = 1 \text{ يكفي } g(x) = 1$$

$$\text{أي } 1 - (1 + 2x)e^{2x} = 0 \text{ ومنه } -(1 + 2x)e^{2x} = 0$$

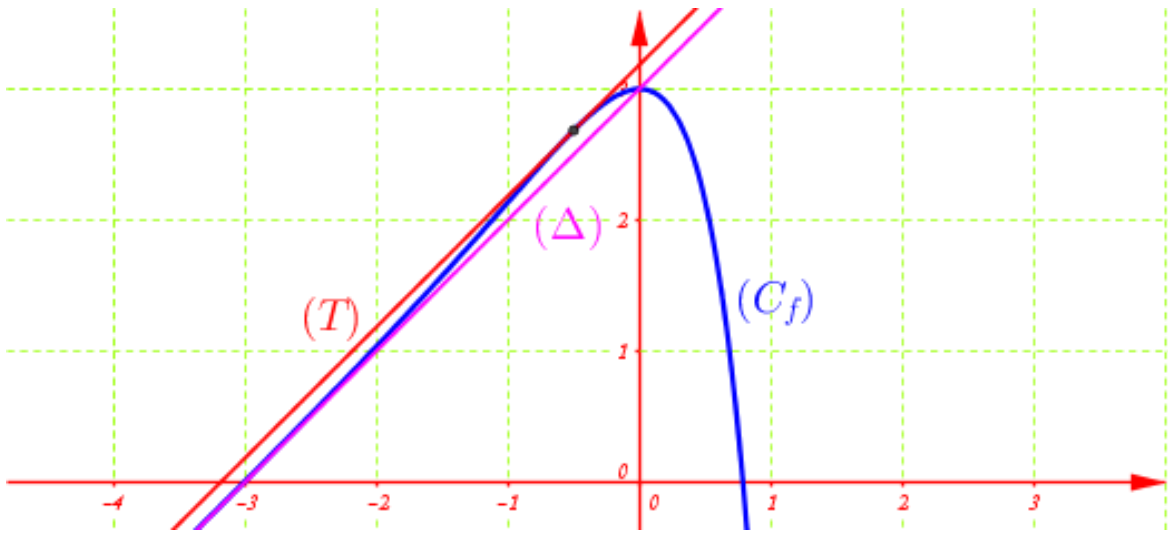
$$\text{وبالتالي } 2x + 1 = 0 \text{ ومنه } x = -\frac{1}{2}$$

المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) في النقطة ذات الفاصلة $x_0 = -\frac{1}{2}$.

$$\text{تعيين معادلة ديكارتية للمماس } (T): y = f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$(T): y = 1 \times \left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{2}e^{-1} = x + 3 + \frac{1}{2}e^{-1}$$

(ج) الرسم :

(5) المناقشة البيانية لحلول المعادلة : $f(x) = x + m$: (E):

حلول المعادلة هي فواصل النقط المشتركة بين (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y = x + m$ الموازي لكل من المستقيم (Δ) والمماس (T) .

إذا كان $m \in]-\infty; 3[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .

إذا كان $m = 3$ المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما .

إذا كان $m \in \left] 3; 3 + \frac{1}{2}e^{-1} \right[$ المعادلة تقبل حلين سالبين .

إذا كان $m = 3 + \frac{1}{2}e^{-1}$ المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا .

إذا كان $m \in \left] 3 + \frac{1}{2}e^{-1}; +\infty \right[$ المعادلة ليس لها حل .

(6) لدينا الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $h(x) = \frac{1 + 3x - e^{\frac{2}{x}}}{x}$.

(أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$:

لدينا : $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + 3 - \frac{1}{x}e^{\frac{2}{x}} = \frac{1 + 3x - e^{\frac{2}{x}}}{x} = h(x)$

(ب) حساب $h'(x)$: $h'(x) = -\frac{1}{x^2} \times f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \times g\left(\frac{1}{x}\right)$

(ج) إستنتاج إتجاه تغير الدالة h وتشكيل جدول تغيراتها:

إشارة $h'(x)$ عكس إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g\left(\frac{1}{x}\right)$	+		-
$h'(x)$	-		+

الدالة h متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0[$ ومتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-		+
$h(x)$	3 ↘ $-\infty$		$-\infty$ ↗ 3