

I - (U_n) و (V_n) متاليتين عدديتين حقيقيتين معرفتين على $\mathbb{N}$ كيلي :

$$\begin{cases} U_0 = e + e^{-1} \\ U_{n+1} = \frac{eU_n + e^{-1}V_n}{e + e^{-1}} \end{cases} ; \begin{cases} V_0 = e - e^{-1} \\ V_{n+1} = \frac{eV_n + e^{-1}U_n}{e + e^{-1}} \end{cases}$$

- ① أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}$ حيث $w_n = U_n - V_n$ ، وعين حدها الأول .
- ② أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (w_n) ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.
- ③ أثبت أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما والمتتالية (V_n) متزايدة تماما .
- ④ استنتج أن المتاليتين (U_n) و (V_n) تتقاربان نحو نفس النهاية l .
- ⑤ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $e - e^{-1} \leq V_n \leq U_n \leq e + e^{-1}$.

II - نعتبر المتتالية العددية (t_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $t_n = U_n + V_n$.

- ① أثبت أن المتتالية (t_n) ثابتة ، ثم استنتج قيمة العدد الحقيقي l .
- ② بين أن : $U_n = \frac{1}{2}(t_n + w_n)$ وأن : $V_n = \frac{1}{2}(t_n - w_n)$.
- ③ استنتج عبارة الحد العام لكل من المتاليتين (U_n) و (V_n) .

III - نعتبر المجموع S_n و الجداء P_n حيث :

$$\begin{cases} S_n = (U_0^2 - V_0^2) + (U_1^2 - V_1^2) + (U_2^2 - V_2^2) + \dots + (U_{n-1}^2 - V_{n-1}^2) \\ P_n = (U_0^2 - V_0^2) \times (U_1^2 - V_1^2) \times (U_2^2 - V_2^2) \times \dots \times (U_n^2 - V_n^2) \end{cases}$$

- ① أحسب بدلالة n المجموع S_n .
- ② أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
- ③ أثبت أن :

$$P_n = 4^{n+1} \sqrt{\left(\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}\right)^{n^2 + n}}$$