

التمرين

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = e^x + x - 2$

(1) أدرس تغيرات الدالة g .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.4 < \alpha < 0.5$

(3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 1 - x + \frac{x-1}{e^x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ وحدته 2 cm .

(1) بين أن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x) = \frac{-g(x)}{e^x}$

(3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) بين أن : $f(\alpha) = -(\alpha + \frac{1}{\alpha-2})$ ، ثم أعط حصرا $f(\alpha)$.

(5) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

(6) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) ، ثم اكتب معادلته.

(7) أحسب $f(0)$ و $f(1)$ ثم أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f) .

(8) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة :

$$(m-1)e^x + 1 = x$$

(9) أ) عين إشارة $f(x)$.

ب) أنشئ في نفس المعلم المنحنى (C_h) الممثل للدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = |f(x)|$$

بالتوفيق.

التصحيح النموذجي

العلامة	الحل	رقم التمرين									
0.5 ن	(I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = e^x + x - 2$ (1) دراسة تغيرات الدالة g • النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ • الدالة المشتقة: g دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و g' دالتها المشتقة حيث : من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $g'(x) = e^x + 1$ • إشارة $g'(x)$: $g'(x) > 0$ لأن $1 > 0$ و $e^x > 0$ و منه g دالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ • جدول التغيرات <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tr> <td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>$g'(x)$</td><td></td><td style="text-align: center;">+</td></tr> <tr> <td>$g(x)$</td><td style="text-align: center;">$-\infty$</td><td style="text-align: center;">$+\infty$</td></tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$g'(x)$		+	$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$	التمرين
x	$-\infty$	$+\infty$									
$g'(x)$		+									
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$									
0.5 ن	(2) نبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.4 < \alpha < 0.5$ g دالة مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ومنه مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[0.4 ; 0.5]$ لدينا $g(0.4) = -0.11$; $g(0.5) = 0.15$ و منه $g(0.4) \times g(0.5) < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.4 < \alpha < 0.5$										

(3) استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

0.5 ن

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 1 - x + \frac{x-1}{e^x}$

(1) نبين أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - x + \frac{x-1}{e^x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(x-1) \left(-1 + \frac{1}{e^x}\right)\right] = -\infty$$

0.5 ن

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty \end{array} \right. \quad \text{لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - x + \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = -\infty$$

لأن

0.5 ن

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \end{array} \right.$$

(2) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x) = \frac{-g(x)}{e^x}$

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و f' دالتها المشتقة حيث:

$$f'(x) = -1 + \frac{e^x - xe^x + e^x}{(e^x)^2} \quad \text{من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} \text{ لدينا:}$$

$$f'(x) = \frac{-e^{2x} - xe^x + 2e^x}{(e^x)^2} \quad \text{و منه:}$$

$$f'(x) = \frac{-(e^x + x - 2)}{e^x} \quad \text{و منه:}$$

$$f'(x) = \frac{-g(x)}{e^x} \quad \text{إذن:}$$

2 ن

(3) استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها.

• إشارة $f'(x)$: من إشارة $-g(x)$ لأن $e^x > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$-g(x)$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-

ن 1.5

و منه f دالة متزايدة تماما على المجال $]-\infty ; \alpha]$
و متناقصة تماما على المجال $[\alpha ; +\infty[$

• جدول التغيرات

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

ن 0.5

(4) نبين أن : $f(\alpha) = -\left(\alpha + \frac{1}{\alpha-2}\right)$

لدينا : $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{\alpha-1}{e^\alpha}$ (*)
و لدينا مما سبق: $g(\alpha) = 0$ و منه $e^\alpha = -(\alpha - 2)$

ن 1

بالتعويض في (*) نجد : $f(\alpha) = 1 - \alpha - \left(\frac{\alpha-1}{\alpha-2}\right)$

إذن : $f(\alpha) = -\left(\alpha + \frac{1}{\alpha-2}\right)$

• تعيين حصر $f(\alpha)$.

لدينا : $0.4 < \alpha < 0.5$ و $f(\alpha) = -\left(\alpha + \frac{1}{\alpha-2}\right)$
و منه $0.126 < f(\alpha) < 0.267$

ن 0.5

(5) أ) نبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

1 ن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{e^x} = 0$$

و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

(ب) الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

لدينا $f(x) - y = 0$ معناه $\frac{x-1}{e^x} = 0$ يكافئ $x-1 = 0$ لأن $e^x > 0$ و منه

$$x = 1$$

1 ن

إذن إشارة $f(x) - y$ من إشارة $x-1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوضعية النسبية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

في النقطة $A(1; 0)$

(6) - نبين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يكون موازيا لـ (Δ) ، و كتابة معادلته.

1 ن

$$\text{معناه : } f'(x) = -1 \text{ و منه } \frac{-(e^x + x - 2)}{e^x} = -1 \text{ أي}$$

$$e^x + x - 2 = e^x \text{ إذن } x = 2$$

و منه المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يكون موازيا لـ (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة 2

- معادلة المماس (T)

0.5 ن

$$\text{لدينا } f'(2) = -1 \text{ و } f(2) = -1 + \frac{1}{e^2} \text{ إذن : } (T): y = -x + 1 + \frac{1}{e^2}$$

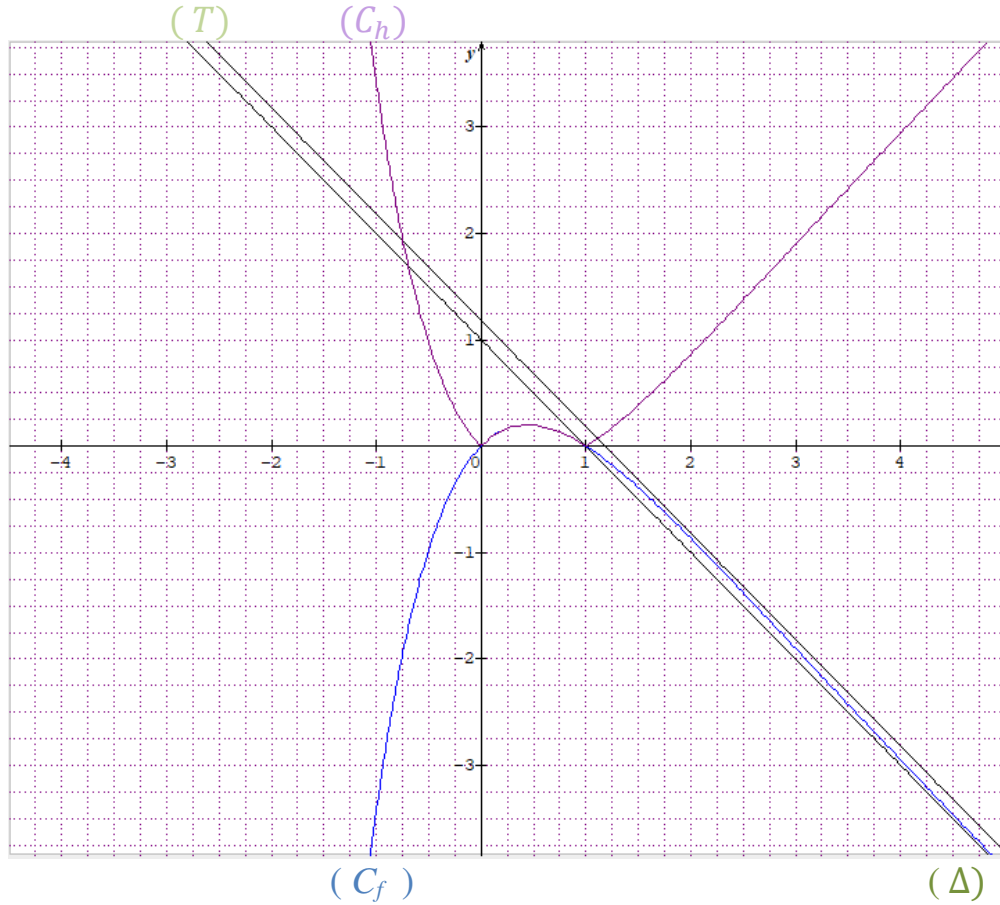
(7) - حساب $f(0)$ و $f(1)$

$$f(1)=0 ; f(0)=0$$

0.5 ن

انشاء (Δ) ; (T) و (C_f) .

1.5 ن



(8) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m إشارة حلول المعادلة :
 $(m - 1)e^x + 1 = x$

لدينا $(m - 1)e^x + 1 = x$ و منه $f(x) = -x + m$

إذن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) و المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة
 $y = -x + m$.

2 ن

- لما $m \in]-\infty; 1]$ فإن المعادلة تقبل حل وحيد
- لما $m \in]1; 1 + \frac{1}{e^2}]$ فإن المعادلة تقبل حلين
- لما $m = 1 + \frac{1}{e^2}$ فإن المعادلة تقبل حل وحيد
- لما $m \in]1 + \frac{1}{e^2}; +\infty[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول

(9) أ إشارة $f(x)$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f(x)$					
	-	0	+	0	-

1 ن

ب) انشاء في نفس المعلم المنحنى (C_h) الممثل للدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = |f(x)|$$

- لما $x \in [0; 1]$ فإن (C_h) ينطبق على (C_f) .
- لما $x \in]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$ فإن (C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل.

2 ن