

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب : $u_1 = e^{-1}$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $u_{n+1} = \frac{n+1}{en} u_n$.
(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $u_n > 0$.

(ب) قارن بين $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و 1 ، ثم استنتج اتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n) .

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على N^* ، $v_n = \frac{1}{en} u_n$ ، بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدتها الأولى .

(3) جد بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، ثم استنتج عبارة u_n واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) احسب بدلالة n المجموع T_n حيث : $T_n = \frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} + \frac{u_3}{v_3} + \dots + \frac{u_n}{v_n}$.

(5) احسب بدلالة n العدد P_n حيث : $P_n = \ln(u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n)$.

التمرين الثاني (05 نقط) :

نعتبر التكاملين J و I حيث : $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1} dx$ و $J = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx$.

(1) بين أن : $I = \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3$.

(2) احسب $I - J$ ، ثم استنتج قيمة J .

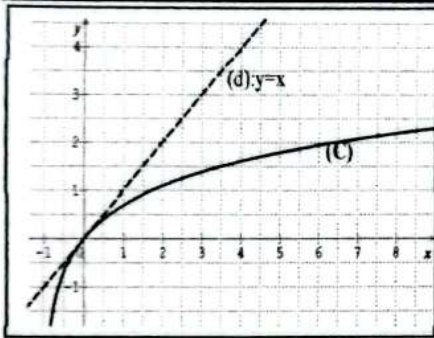
(3) n عدد طبيعي حيث $n \geq 2$ ، نعتبر العدد الحقيقي K_n المعروف كما يلي : $K_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} e^{-x} \cdot \ln(e^{2x}-1) dx$.

باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب العدد K_2 .

(4) (أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم أن ، $\frac{2e^x}{e^{2x}-1} = \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1}$.

(ب) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = K_2 + K_3 + \dots + K_n$ ، ثم عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

التمرين الثالث (09 نقط) :



(I) (C) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln(1+x)$ المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$

و (d) المستقيم ذو المعادلة $y=x$. كما هو موضح في الشكل المقابل

بقراءة بيانية ، برر أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x ، $0 < \ln(1+x) < x$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R ب : $f(x) = \ln(e^{2x} + e^{-x})$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{2e^{3x}-1}{e^{3x}+1}$. (ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = 2x + \ln(1+e^{-3x})$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته .

(3) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x]$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ') يطلب تعيين معادلته .

(4) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيمين (Δ) و (Δ') .

(5) انشئ (Δ) ، (Δ') و (C_f) .

(6) λ عدد حقيقي موجب تماما ، المساحة المحددة بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما : $x=0$ و $x=\lambda$.

بين أن : $A(\lambda) < \frac{1}{3}$.

(7) الدالة العددية h المعرفة على R ب : $h(x) = f(|x|-1) + 1$ و (C_h) منحنىها البياني في المعلم السابق .

(أ) بين أن الدالة h زوجية . (ب) اشرح كيف يتم إنشاء المنحنى (C_h) انطلاقا من (C_f) ، ثم ارسمه .

$$V_n = \frac{1}{e^n} U_n \quad C(1) \text{ لـ } U_n$$

$$U_m = e^m V_m = m e^{-m} = \frac{m}{e^m}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} m e^{-m} = 0$$

$$T_m = \frac{U_1}{V_1} + \frac{U_2}{V_2} + \dots + \frac{U_m}{V_m}$$

$$\frac{U_m}{V_m} = e^m \quad U \text{ لـ } V$$

$$T_n = e(1+2+3+\dots+m)$$

$$T_n = \frac{e}{2} m(m+1) = \frac{e(m^2+m)}{2}$$

$$P_m = \ln(U_1 \times U_2 \times U_3 \times \dots \times U_m) \quad (5)$$

$$P_m = \ln\left(\frac{1}{e} \times \frac{2}{e^2} \times \frac{3}{e^3} \times \dots \times \frac{m}{e^m}\right)$$

$$P_n = \ln\left(\frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times m}{e^{1+2+3+\dots+m}}\right)$$

$$P = \ln(m!) - \ln\left(e^{\frac{n}{2}(n+1)}\right)$$

$$P_m = \ln(m!) - \frac{n}{2}(n+1)$$

$$P_m = \ln(m!) - \frac{m^2+m}{2}$$

فرض طرفية في $U_n > 0$

$$U_{n+1} < U_n$$

وضوح $C(1)$ من U_n

في $C(1)$ U_n $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$

مقارنة حسب طرفية

$$V_n = \frac{1}{e^n} U_n, \quad m \in \mathbb{N}^*$$

$$V_{n+1} = V_n \times q: m \in \mathbb{N}^* \text{ و } q = \frac{U_{n+1}}{U_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{e^{(n+1)}} U_{n+1}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{e^{(n+1)}} \times \frac{m+1}{e^m} U_m$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{e} \times \frac{1}{e^m} U_m = \frac{1}{e} V_m$$

$$q = \frac{1}{e} \text{ و } q < 1 \text{ و } q > 0 \text{ و } q \neq 1$$

$$V_n = \frac{1}{e^n} U_n = \frac{1}{e^2} U_1 \text{ و } q < 1$$

$$V_n = V_1 \times q^{n-1}; \quad m \in \mathbb{N}^* \text{ و } (3)$$

$$V_n = e^{-2} \times (e^{-1})^{n-1} = e^{-n-1}$$

$$U_n = e^{n+1} V_n = e^{n+1} \times e^{-n-1} = 1$$

$$U_n = 1$$

$$U_n = 1$$

$$U_n = 1$$

التجريب (2) (C2)

$$U_{n+1} = \frac{m+1}{e^n} U_m: m \in \mathbb{N}^* \text{ و } U_1 = e^{-1}$$

في $C(1)$ $U_n > 0: m \in \mathbb{N}^*$

المطلوب: نتحقق من أجل $m=1$

في $C(1)$ $U_1 > 0$ و $e^{-1} > 0$ و $e^{-1} < 1$

المطلوب (2): نفرض أن $U_n > 0$ و $U_n < 1$

أجل m كيف، وبنفسه $U_{n+1} > 0$

لنبدأ أن $U_n > 0$ و $\frac{m+1}{e^n} > 0$

و من هنا $\frac{m+1}{e^n} U_n > 0$

$U_{n+1} > 0$

وضوح $C(1)$ $U_n > 0: m \in \mathbb{N}^*$

(C) $\frac{U_{n+1}}{U_n} - 1 = \frac{m+1}{e^n} - 1$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} - 1 = \frac{(1-e)m+1}{e^n}$

في $C(1)$ $m \geq 1$ و $e^n > 0$ و $(1-e)m+1 < 0$

و $\frac{U_{n+1}}{U_n} - 1 < 0$ و $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$

(2) $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$

النتيجة: U_n متناقص

$$S_n = \left[-e^{-n} \ln(e^{2n}-1) \right] + \int_{e^{-n}-1}^{e^n-1} \frac{e^n}{e^n-1} \frac{e^n}{e^n+1} \frac{1}{e^n-1} dn$$

$$S_n = \left[-e^{-n} \ln(e^{2n}-1) + \ln\left(\frac{e^n-1}{e^n+1}\right) \right]$$

$$S_n = -\frac{1}{n+1} \ln\left(\frac{e}{e+1}\right) + \ln\left(\frac{n}{n+2}\right) + \frac{3}{2} \ln(3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{\ln(n)}{n+1} - \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+2}\right) + \frac{3}{2} \ln(3) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{n+1} \times \frac{\ln(n)}{n} - \frac{n+1}{n+1} \times \frac{\ln(n+1)}{n+2} + \ln\left(\frac{n}{n+2}\right) + \frac{3}{2} \ln(3) \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{2} \ln(3)$$

$$K_m = \int_{e^{-m}-1}^{e^{m+1}-1} e^{-n} \ln(e^{2n}-1) dx \quad (3)$$

$$K_2 = \int_{e^{-2}-1}^{e^3-1} e^{-n} \ln(e^{2n}-1) dx$$

$$\begin{cases} u = \ln(e^{2n}-1) \\ u' = \frac{2e^{2n}}{e^{2n}-1} \\ v' = e^{-n} \Rightarrow v = -e^{-n} \end{cases}$$

$$K_2 = \left[-e^{-n} \ln(e^{2n}-1) \right] + \int_{e^{-2}-1}^{e^3-1} \frac{2e^{2n}}{e^{2n}-1} dx$$

$$K_2 = -\frac{1}{3} \ln(8) + \frac{1}{2} \ln(3) + 2J$$

$$K_2 = -2 \ln(2) + \frac{3}{2} \ln(3)$$

$$\frac{e^n}{e^n-1} - \frac{e^n}{e^n+1} = \frac{2e^n}{e^{2n}-1}$$

$$S_n = K_2 + K_3 + \dots + K_m$$

$$S_n = \int_{e^{-n}-1}^{e^{n+1}-1} e^{-n} \ln(e^{2n}-1) dx$$

$$S_n = \left[-e^{-n} \ln(e^{2n}-1) \right] + \int_{e^{-n}-1}^{e^{n+1}-1} \frac{2e^{2n}}{e^{2n}-1} dx$$

$$S_n = \left[-e^{-n} \ln(e^{2n}-1) \right] + \int_{e^{-n}-1}^{e^{n+1}-1} \frac{2e^{2n}}{e^{2n}-1} dx$$

$$I = \int_{e^{-2}-1}^{e^3-1} \frac{e^{2n}}{e^{2n}-1} dx \quad (1)$$

$$I = \frac{1}{2} \left[\ln(e^{2n}-1) \right]$$

$$I = \frac{1}{2} [\ln(8) - \ln(3)]$$

$$I = \frac{1}{2} (3 \ln(2) - \ln(3)) = \frac{3}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(3)$$

$$I - J = \int_{e^{-2}-1}^{e^3-1} \frac{e^{2n}-e^n}{e^{2n}-1} dx \quad (2)$$

$$I - J = \int_{e^{-2}-1}^{e^3-1} \frac{e^{2n}(e^n-1)}{(e^n-1)(e^n+1)} dx$$

$$I - J = \int_{e^{-2}-1}^{e^3-1} \frac{e^{2n}}{(e^n-1)(e^n+1)} dx$$

$$I - J = \int_{e^{-2}-1}^{e^3-1} \frac{e^{2n}}{\ln(2) e^{2n} + 1} dx$$

$$I - J = \left[\ln(e^n+1) \right]$$

$$I - J = \ln(4) - \ln(3) = 2 \ln(2) - \ln(3)$$

$$J = I - 2 \ln(2) + \ln(3)$$

$$J = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

٤) الوضع السيلبي (f) و (Δ)

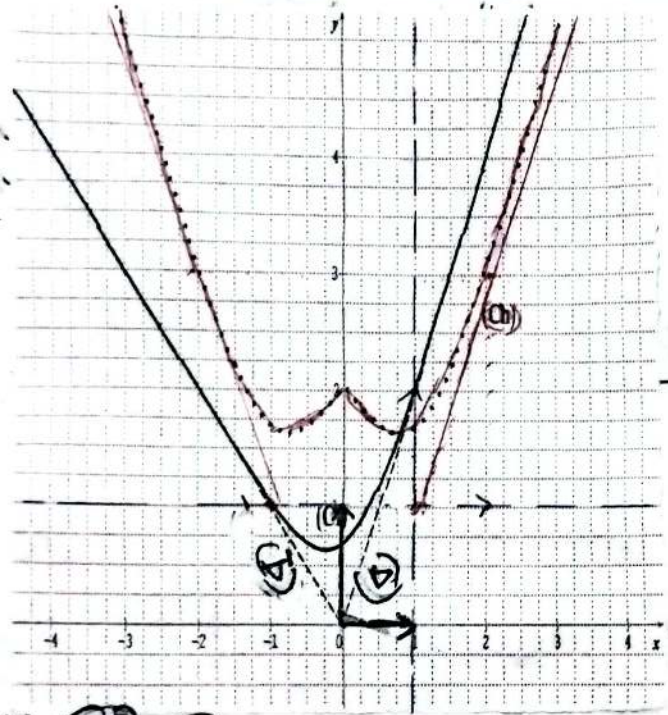
٥٢٧) $f(n-y) = \ln(1+e^{-3n}) > 0$

ان (CH) فوق (Δ) و (R) ك (Δ)
الوضع السيلبي (CH) و (Δ')

٥٢٧) $f(n-y) = \ln(1+e^{-3n}) > 0$

ان (CH) فوق (Δ') و (R) ك (Δ')

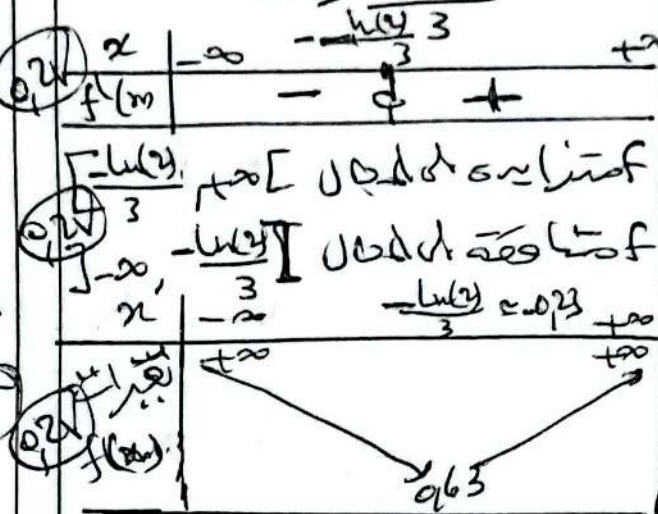
٥) رسم (Δ) و (Δ') و (CH)



٥٢٧) (CH) —
٥٢٧) (Δ) —
٥٢٧) (Δ') —

$3n \geq -\ln(n)$

$n \geq \frac{-\ln(n)}{3}$



$f(n) = \ln(2^n + e^{-n})$

٥٢٧) $f(n) = \ln[2^n(1+e^{-3n})]$

$f(n) = 2n + \ln(1+e^{-3n})$

٥٢٧) $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [2n + \ln(1+e^{-3n})] = +\infty$

٥٢٧) $\lim_{n \rightarrow -\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow -\infty} [2n + \ln(1+e^{-3n})] = -\infty$

٥٢٧) و ان (CH) فوق (Δ) و (R) ك (Δ)
٥٢٧) و ان (Δ') فوق (Δ) و (R) ك (Δ')

التحريك (٥٣) (٥٤)

I من الرسم ان (CH) فوق (Δ) و (R) ك (Δ)

٥٢٧) و ان (CH) فوق (Δ) و (R) ك (Δ)

٥٢٧) $f(n) = \ln(2^n + e^{-n})$

٥٢٧) $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty$

٥٢٧) $\lim_{n \rightarrow -\infty} f(n) = -\infty$

٥٢٧) $f'(n) = \frac{2e^n - e^{-n}}{e^{2n} + e^{-n}} \times \frac{e^n}{e^n}$

٥٢٧) $f'(n) = \frac{2e^{3n} - 1}{e^{3n} + 1}$

٥٢٧) و ان (CH) فوق (Δ) و (R) ك (Δ)

٥٢٧) $f'(n) \geq 0 \iff 2e^{3n} - 1 \geq 0 \iff e^{3n} \geq \frac{1}{2}$

$x \in [0, +\infty[$ (ب) $0.21) A(x) = \int_0^x (f(m) - y) dx$ (6)
 $0.1) h(x) = f(x-1) + 1$
 ان (ب) هو صورة (ج)
 كما ان $[0, +\infty[$ بالصفات السابقة
 شائعة $u(1)$ في شكل رسم
 (ب) h للفترة $[0, +\infty[$ بالتناظر
 الى صورة استرايب h في h
 رسم (ب) موجود في نفس المثلث
 اسفل

$0.21) A(x) = \int_0^x \ln(1 + e^{-3n}) dn$
 لدينا ان $x > 0$
 $(\text{I}) \ln(1+x) < x$
 وبالتالي $\ln(1 + e^{-3n}) < e^{-3n}$
 $\int_0^x \ln(1 + e^{-3n}) dn < \int_0^x e^{-3n} dn$
 $A(x) < -\frac{1}{3} [e^{-3x}]_0^x$
 $A(x) < -\frac{1}{3} [e^{-3x} - 1]$
 $0.22) A(x) \leq \frac{1}{3} (1 - e^{-3x}) < \frac{1}{3}$
 $A(x) < \frac{1}{3}$ ان
 $h(m) = f(1-x-1) + 1, R(2)$
 $(\text{C}) -x \in R, x \in R$ ان
 $0.1) h(-x) = f(1-x-1) + 1$
 $h(-x) = f(1-x-1) + 1 = h(m)$
 $h \in C$ ان h زوجية