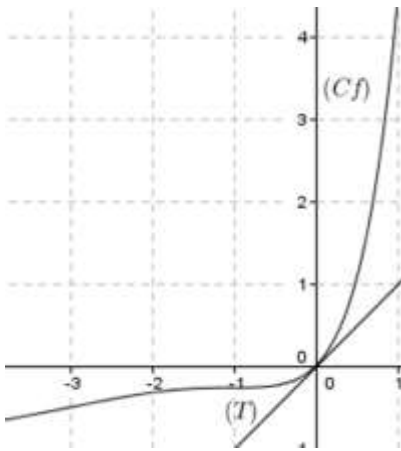


الفرض الأول للثلاثي الأول في مادة الرياضيات

التمرين 01: (03,50 نقاط)

الدالة العددية المعرفة على IR بتمثيلها البياني (C_f) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0 كما هو موضح في الشكل المقابل.



- (1) بقراءة بيانية: عيّن $f'(0)$ و أعط معادلة للمماس (T) .
- (2) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $f(x) = x + m - 2$.
- (3) عيّن قيمة a إذا علمت أن $f(x) = (x^2 + a)e^x - 1$.
- (4) الدالة العددية المعرفة على IR بـ: $g(x) = (x^2 + 1)e^{|x|} - 1$ و (C_g) تمثيلها البياني، بيّن أن الدالة g زوجية ثم اشرح كيفية إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه.

التمرين 02: (06,50 نقاط)

- (I) نعتبر الدالة g المعرفة على IR بـ: $g(x) = x^3 - 2x^2 - 2$.
 - (1) أدرس تغيرات الدالة g و شكّل جدول تغيراتها.
 - (2) بيّن أن المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حل وحيد α حيث $2,1 < \alpha < 2,3$.
 - (3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x) + 1$ على IR .
- (II) نعتبر الدالة f المعرفة على IR بـ: $f(x) = (x^3 + x^2 + 2x + 1)e^{-x}$.
 - (1) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f'(x) = -[g(x) + 1]e^{-x}$.
 - (2) استنتج إتجاه تغير الدالة f .
 - (3) عيّن دون حساب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}$ و أعط تفسيراً بيانياً للنتيجة.
 - (4) بيّن أن $f(\alpha) = \frac{3\alpha^2 + 2\alpha + 2}{e^\alpha}$.
- (III) لتكن الدالة h المعرفة على $IR - \{0\}$ بـ: $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

عيّن إتجاه تغير الدالة h .

الإجابة النموذجية

التسعين الأول: (03,50 نقاط)

(1) $f'(0)$ هو معامل توجيه المماس (T)

$$f'(0) = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

معادلة (T) : $y = x$

(2) حلول المعادلة $f(x) = x + m - 2$ هي فواصل

نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (المائل) ذو المعادلة $y = x + m - 2$

• $m < 2$: لا توجد حلول.

• $m = 2$: للمعادلة حل وحيد.

• $m > 2$: للمعادلة حلان متمايزان.

$$f(x) = (x^2 + a)e^x - 1 \quad (3)$$

لدينا: $f(0) = 0$ و $a - 1 = 0$ إذن: $a = 1$.

$$g(x) = (x^2 + 1)e^{|x|} - 1 \quad (4) \quad x \in \mathbb{R}$$

• بيان أن g دالة زوجية:

◀ من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$

$$g(-x) = ((-x)^2 + 1)e^{|-x|} - 1$$

$$g(-x) = (x^2 + 1)e^{|x|} - 1$$

$$g(-x) = g(x) \text{ أي}$$

ومنه g دالة زوجية.

• إنشاء (C_g) :

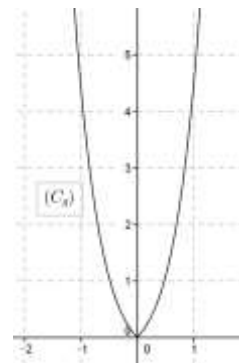
نلاحظ أنه من أجل $x \geq 0$ فإن

$$g(x) = f(x)$$

أي أن (C_g) ينطبق على (C_f) في المجال

$$[0; +\infty[$$

و بما أن الدالة g زوجية فإن (C_g) متناظر بالنسبة إلى حامل محور الترتيب.



التسعين الثاني: (06,50 نقاط)

$$x \in \mathbb{R}, g(x) = x^3 - 2x^2 - 2$$

(1) دراسة تغيرات الدالة g :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$g'(x) = 3x^2 - 4x$$

x	$-\infty$	0	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$

الدالة g متزايدة تماماً على المجالين $]-\infty; 0]$ و

$[\frac{4}{3}; +\infty[$ و متناقصة تماماً على المجال $[0; \frac{4}{3}]$

x	$-\infty$	0	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	-2	$-\frac{86}{27}$	$+\infty$

(2) بيان أن المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حل وحيد α حيث $2,1 < \alpha < 2,3$

◀ لدينا من جدول التغيرات الدالة g مستمرة و

رتيبة تماماً على المجال $]2,1; 2,3[$.

$$\begin{cases} g(2,1) \simeq -1,55 \\ g(2,3) \simeq -0,4 \end{cases} \quad \text{و لدينا}$$

$$\text{أي: } g(2,1) < -1 < g(2,3)$$

◀ ومنه حسب م.ق.م فإن المعادلة $g(x) = -1$

تقبل حل وحيد α حيث $2,1 < \alpha < 2,3$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x) + 1$	$-$	0	$+$

..

$$(1) \text{ تبيان أن } f'(x) = -[g(x) + 1]e^{-x}$$

$$f'(x) = (3x^2 + 2x + 2)e^{-x}$$

$$-e^{-x}(x^3 + x^2 + 2x + 1)$$

$$f'(x) = (-x^3 + 2x^2 + 1)e^{-x}$$

$$f'(x) = -(x^3 - 2x^2 - 1)e^{-x}$$

$$\text{أي: } f'(x) = -[g(x) + 1]e^{-x}$$

(2) اتجاه التغير: الدالة f متناقصة تماماً على المجال

$[\alpha; +\infty[$ و متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; \alpha]$.

0,5
0,25

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} = f'(\alpha) = 0 \quad (3)$$

ت.هـ: (C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة α مماس أفقي.

0,50

$$f(\alpha) = \frac{3\alpha^2 + 2\alpha + 2}{e^\alpha} \quad (4) \text{ تبيان أن}$$

لدينا:

$$f(\alpha) = (\alpha^3 + \alpha^2 + 2\alpha + 1)e^{-\alpha}$$

$$\alpha^3 - 2\alpha^2 - 2 = -1 \quad \text{و لدينا: } g(\alpha) = -1 \text{ أي:}$$

$$\alpha^3 = 2\alpha^2 + 1 \text{ و عليه:}$$

و بالتالي:

$$f(\alpha) = (2\alpha^2 + 1 + \alpha^2 + 2\alpha + 1)e^{-\alpha}$$

$$f(\alpha) = \frac{3\alpha^2 + 2\alpha + 2}{e^\alpha} \text{ أي:}$$

$$h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{.III}$$

• تعيين إتجاه تغير الدالة h :

0,25

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

0,50

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{\alpha}$	$+\infty$
$-\frac{1}{x^2}$	-		-	-
$f'\left(\frac{1}{x}\right)$	+		- 0 +	
$h'(x)$	-		+ 0 -	

0,25

الدالة h متناقصة تماما على المجالين $]-\infty; 0[$ و

$\left[\frac{1}{\alpha}; +\infty\right[$ و متزايدة تماما على المجال $\left]0; \frac{1}{\alpha}\right]$.