



ثانوية: عبد الحميد بن باديس
سيدي سعادة-يلل
السنة الدراسية: 2022-2023

مديرية التربية لولاية غليزان
إختبار الفصل الأول
شعبة : 3 تقني رياضي

المدة : 02سا

إختبار في مادة : الرياضيات

التمرين الأول: (06 نقط)

أجب بـ: صح أو خطأ مع التبرير في كل مايلي

1. نقبل أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \leq e^x - x - 1 \leq \frac{1}{2}x^2 + x^4$. إذن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$

2. S مجموعة حلول المعادلة $4^x - 5 \times 2^x + 6 = 0$ في $\mathbb{R}$ هي : $S = \left\{ \ln 6; \frac{\ln 3}{\ln 2} \right\}$

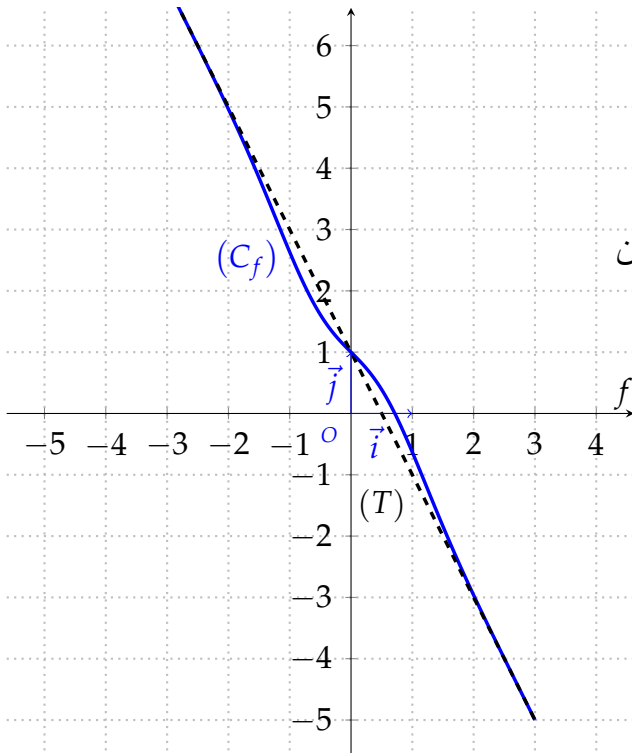
3. عدد أرقام العدد 2022^{2023} هو : 6688

4. S' مجموعة حلول المتراجحة $\ln(x-1) + \ln(x+1) \leq \ln 8$ في $\mathbb{R}$ هي : $S' = [1; 3]$

5. الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $k(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$ ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $k(-x) + k(x) = 3$

التمرين الثاني: (06 نقط)

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
 $f(x) = xe^{-x^2} + ax + b$ حيث a و b عدنان حقيقيان مع $a \neq 0$ و (T) مستقيم مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$ كما موضح في الشكل المقابل .



1. أكتب معادلة للمستقيم (T) . ثم إستنتج أن $a = -2$ و $b = 1$

إذا علمت أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x^2} = 0$

2. أثبت أن (C_f) يقبل مماسين (T') و (T'') موازيان لـ (T) يطلب تعيين معادلة لكل منهما

3. ناقش حسب قيم العدد الحقيقي m بحيث المعادلة $f(x) = -2x + m$ تقبل حلين سالبين

4. لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

أ) أحسب نهايات الدالة h عند حدود مجموعة تعريفها

ب) أحسب $h'(x)$ ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة h

التمرين الثالث: (08 نقط)

(I) g دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - \frac{x^3}{3} - 2 \ln x$

1. ادرس تغيرات الدالة g . ثم شكل جدول تغيراتها.

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1 < \alpha < \sqrt{2}$. ثم إستنتج إشارة $g(x)$

(II) f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = -\frac{x}{3} + \frac{\ln x}{x^2}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. حيث وحدة الطول $2cm$

1. احسب نهاية الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها .

2. اثبت من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

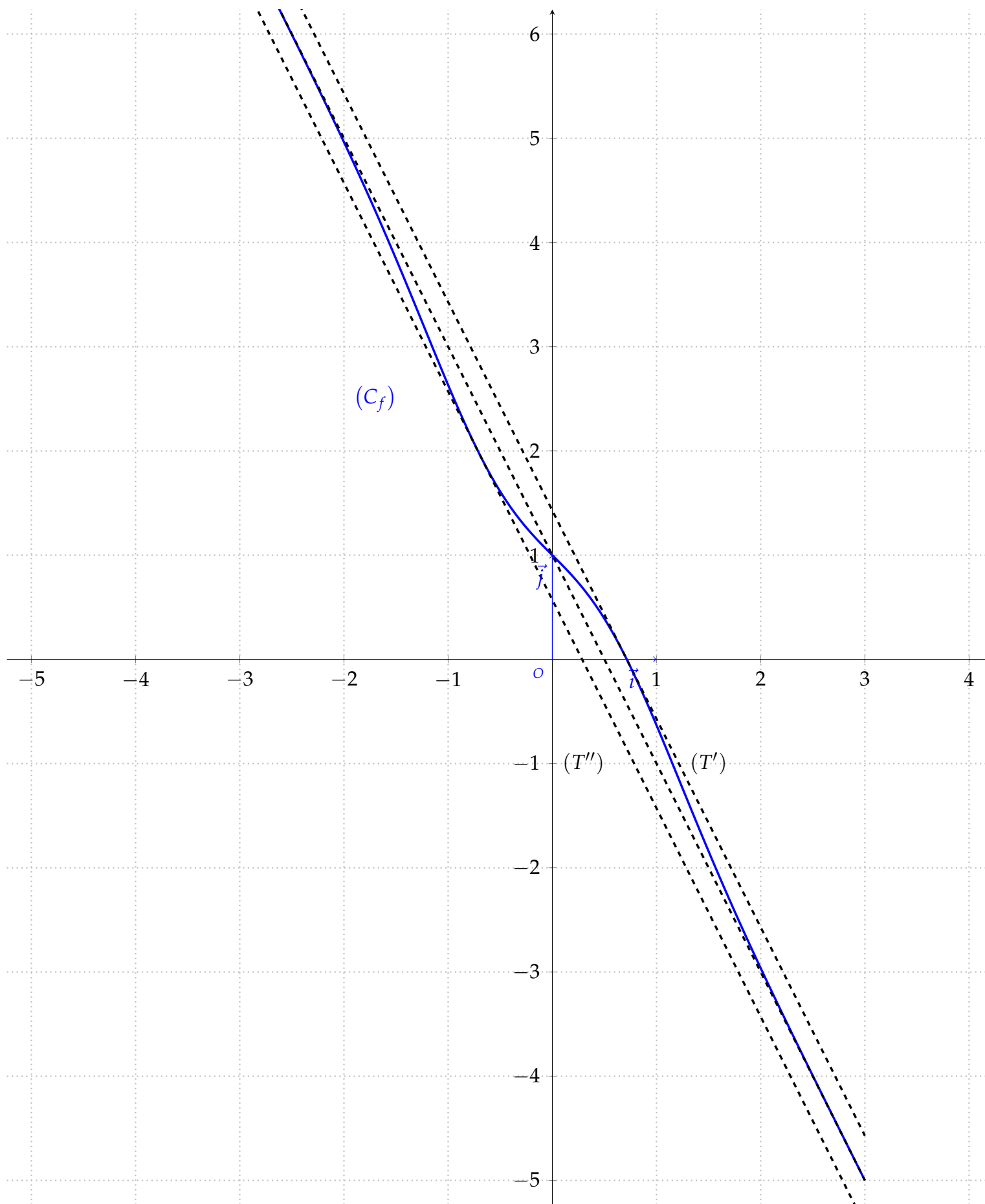
ثم إستنتج إتجاه تغير f ، وشكل جدول تغيراتها

3. أ) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة : $y = -\frac{x}{3}$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)

4. اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماس (T) ميله $-\frac{1}{3}$ يطلب تعيين معادلة له .

5. بين أن $f(\alpha) = \frac{1 - \alpha^3}{3\alpha^2}$ ، ثم أنشئ (C_f) ، (Δ) و (T) (نأخذ $f(\alpha) \approx -0.3$)



تمرين الأول :

(1) صحيح

التبرير:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \leq e^x - x - 1 \leq \frac{1}{2}x^2 + x^4$
وبالضرب في $\frac{1}{x^2}$ من أجل $x \neq 0$ نجد $\frac{1}{2} - \frac{1}{6}x \leq \frac{e^x - x - 1}{x^2} \leq \frac{1}{2} + x^2$

ومنه $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}x \right) \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + x^2 \right)$

ومنه $\frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$ ومنه $\frac{1}{2} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \leq \frac{1}{2}$

(2) خطأ

التبرير:

لدينا: $2^{2x} - 5 \times 2^x + 6 = 0 \dots (*)$ تكافئ $4^x - 5 \times 2^x + 6 = 0$

نضع: $t = 2^x$ إذن $t^2 - 5t + 6 = 0$ تكافئ $(*)$

ومنه $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1$ إذن $\begin{cases} t_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \\ t_2 = \frac{5+1}{2} = 3 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 \ln 2 = \ln 3 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 2^{x_1} = 2^1 \\ e^{x_2 \ln 2} = 3 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 2^{x_1} = 2 \\ 2^{x_2} = 3 \end{cases}$

ومنه $S = \{1; \frac{\ln 3}{\ln 2}\}$ ومنه $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{\ln 3}{\ln 2} \end{cases}$

(3) صحيح

التبرير:

لدينا: $\log(2022^{2023}) = 2023 \log(2022) \approx 6687,595$

ومنه $6687 < \log(2022^{2023}) < 6688$ ومنه $10^{6687} < 2022^{2023} < 10^{6688}$

ومنه عدد أرقام العدد 2022^{2023} هو 6688

(4) خطأ

التبرير:

لدينا: $\ln(x-1) + \ln(x+1) \leq \ln 8$

تعيين D مجموعة التعريف المتراجحة

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x+1$		-	0	+
$x-1$		-	0	+

ومنه $D =]1; +\infty[$

إذن $\ln[(x-1)(x+1)] \leq \ln 8$ تكافئ $\ln(x-1) + \ln(x+1) \leq \ln 8$

ومنه $(x-1)(x+1) \leq 8$ ومنه $x^2 + x - x - 1 \leq 8$ يعني $x^2 - 9 \leq 0$

دراسة إشارة $x^2 - 9$. إذن $x^2 - 9 = 0$ تكافئ $x^2 = 9$

ومنه $x = 3$ أو $x = -3$ ومنه

x	1	3	$+\infty$
$x^2 - 9$		-	0
		-	+

ومنه $S' =]1; 3]$

(5) خطأ

التبرير:

$$\begin{aligned} k(-x) + k(x) &= \frac{3e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} \\ &= \frac{(3e^{-x} - 1)e^x}{(e^{-x} + 1)e^x} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} \\ &= \frac{3 - e^x}{1 + e^x} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} \\ &= \frac{2 + 2e^x}{1 + e^x} = \frac{2(1 + e^x)}{1 + e^x} = 2 \end{aligned}$$

تمرين الثاني :

(1) كتابة معادلة المماس (T)

معادلة المماس (T) من الشكل $y = a'x + b'$ ونلاحظ أن (T) يشمل النقطة $A(0,1)$ ومنه $b' = 1$ ويشمل ايضا النقطة $B(-1;3)$ ومنه $-a' + 1 = 3$

أي $a' = -2$ ومنه $(T): y = -2x + 1$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x^2} = 0$ و $f(x) = xe^{-x^2} + ax + b$

وبالتالي المستقيم ذي المعادلة $y = ax + b$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$

و $-\infty$ وبالمطابقة مع معادلة مستقيم (T) نجد $a = -2$ و $b = 1$

(2) إثبات أن (C_f) يقبل مماسين (T') و (T'') موازيان لـ (T)

لدينا: الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f'

حيث $f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} - 2 = e^{-x^2}(1 - 2x^2) - 2$

إذن $f'(x) = -2$ تكافئ $e^{-x^2}(1 - 2x^2) - 2 = -2$ ومنه $e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0$

ومنه $1 - 2x^2 = 0$ لأن $e^{-x^2} \neq 0$ ومنه $2x^2 = 1$ ومنه $x^2 = \frac{1}{2}$ ومنه $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

أو $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. ومنه يوجد مماسين موازيان لـ (T) أحدهما عند النقطة

ذات الفاصلة $\frac{1}{\sqrt{2}}$ والأخر عند النقطة ذات الفاصلة $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

كتابة معادلة للمماسين (T') و (T'')

$$\begin{cases} (T') : y = -2\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2x + \frac{e^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ (T'') : y = -2\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2x - \frac{e^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

(3) مناقشة حلول المعادلة $f(x) = -2x + m$

المعادلة $f(x) = -2x + m$ تقبل حلين سالبين

من أجل $m \in \left] -\frac{e^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}; 1 \right[$

(4) أ) حساب نهايات الدالة h عند حدود مجموعة تعريفها

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = +\infty$$

ب) حساب $h'(x)$ وإستنتاج إتجاه تغير الدالة h

الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ودالتها المشتقة $h'(x)$

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1}{x}}$$

(1) حساب نهاية الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{3} + \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{3} = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x}{3} + \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3} \text{ إثبات أن } (2)$$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة $f'(x)$ حيث

$$f'(x) = -\frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \ln x}{x^4} = -\frac{1}{3} + \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = -\frac{1}{3} + \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{x^3}{3} + 1 - 2 \ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3} \text{ ومنه}$$

- إستنتاج إتجاه تغير f وتشكيل جدول تغيراتها

لدينا من أجل $x \in]0; +\infty[$: $x^3 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$

- جدول تغيرات الدالة f

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$f(\alpha)$	$-\infty$

(3) إثبات أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة : $y = -\frac{x}{3}$ مقارب للحنى (C_f) بجوار $+\infty$

$$y = -\frac{x}{3} \text{ ومنه المستقيم ذي المعادلة } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-\frac{x}{3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$

- دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)

لدينا: $\ln x - (-\frac{x}{3}) = \frac{\ln x}{x^2}$ ومنه إشارة الفرق من نفس إشارة $\ln x$

لأن $x^2 > 0$ من أجل $x \in]0; +\infty[$ ومنه

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$		-	+
الوضعية		يقطع (C_f) في النقطة $\Omega(1; -\frac{1}{3})$	(C_f) فوق (Δ)

(4) إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مماس (T) ميله $-\frac{1}{3}$ يطلب تعيين معادلة له .

$$-\frac{x^3}{3} + 1 - 2 \ln x = 0 \text{ ومنه } -\frac{x^3}{3} + 1 - 2 \ln x = 0 \text{ يعني } f'(x) = -\frac{1}{3}$$

$$\ln x = \frac{1}{2} \text{ ومنه } 1 - 2 \ln x = 0 \text{ ومنه } -\frac{x^3}{3}$$

$$\text{أي } x = e^{\frac{1}{2}} \text{ ومنه } x = e^{\frac{1}{2}} \text{ ومنه } (T) : y = -\frac{1}{3}(x - e^{\frac{1}{2}}) + f(e^{\frac{1}{2}}) = -\frac{x}{3} + \frac{e^{-1}}{2}$$

$$f(\alpha) = \frac{1 - \alpha^3}{3\alpha^2} \text{ إثبات أن } (5)$$

من خلال التمثيل البياني للدالة f نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) < 0$ وبالتالي من أجل كل عدد حقيقي x بحيث $x \neq 0$: $f'(\frac{1}{x}) < 0$ ومنه $-\frac{1}{x^2} f'(\frac{1}{x}) > 0$ أي $h'(x) > 0$ وبالتالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$		+	+
$h(x)$	1	$+\infty$	1

تمرين الثالث :

(I)

(I) دراسة تغيرات الدالة g

- حساب النهايات

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{x^3}{3} - \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{x^3}{3} - \ln x = -\infty$$

- حساب $g'(x)$

الدالة g قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة $g'(x)$

$$\text{حيث : } g'(x) = -x^2 - \frac{1}{x} = \frac{-x^3 - 1}{x} = -\frac{x^3 + 1}{x}$$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $g'(x) < 0$

- جدول تغيرات الدالة g

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		-	-
$g(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

(ب) إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1 < \alpha < \sqrt{2}$

لدينا الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]1; \sqrt{2}[$

$$\text{ولدينا } \begin{cases} g(1) = \frac{2}{3} \\ g(\sqrt{2}) \approx -0,635 \end{cases} \text{ ومنه } g(\sqrt{2}) < 0 < g(1)$$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

حيث : $1 < \alpha < \sqrt{2}$

- إستنتاج إشارة $g(x)$

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		+	-

(II)

لدينا: $g(\alpha) = 0$ يعني $1 - \frac{\alpha^3}{3} - 2 \ln \alpha = 0$ ومنه $2 \ln \alpha = 1 - \frac{\alpha^3}{3}$ ومنه $\ln \alpha = \frac{1}{2} - \frac{\alpha^3}{6}$ وبالقسمة على α^2 نجد $\frac{\ln \alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\alpha^3}{6\alpha^2}$ ومنه $f(\alpha) = -\frac{2\alpha^3}{6\alpha^2} + \frac{3}{3\alpha^2} - \frac{\alpha^3}{6\alpha^2}$ أي $-\frac{\alpha}{3} + \frac{\ln \alpha}{\alpha^2} = -\frac{\alpha}{3} + \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\alpha^3}{6\alpha^2}$ ومنه $f(\alpha) = \frac{3-3\alpha^3}{6\alpha^2} = \frac{1-\alpha^2}{2\alpha^2}$ - الإنشاء

