

إختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

المدة : 02 سا

يوم : 05/12/2022

المستوى و الشعبة: ثالثة ثانوي علوم تجريبية

التمرين الأول: (05ن)

في كل مما يلي توجد اجابة صحيحة واحدة ، عينها مع التبرير :

[A] ◀ الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $-y' + 2y + 3 = 0$ والذي يحقق $f(0) = 1$ هو الدالة f المعرفة بـ:

(1) $f(x) = 3e^x - 2$

(2) $f(x) = \frac{5}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}$

(3) $f(x) = 2e^{2x} - \frac{3}{2}$

[B] ◀ حلول المعادلة $e^x + 6e^{-x} - 5 = 0$ في $\mathbb{R}$ هي :

(1) $\{\ln(2); \ln(3)\}$

(2) $\{2; 3\}$

(3) $\left\{\ln\left(\frac{1}{2}\right); \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$

(4) $\{e^2; e^3\}$

[C] ◀ منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 3x + \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ يقبل مستقيم مقارب مائل في جوار $-\infty$ معادلته:

(1) $y = 3x - 1$

(2) $y = 3x + 1$

(3) $y = 3x$

[D] ◀ قيمة المجموع S حيث: $S = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$ هي :

(1) $S = -\ln(n-1)$

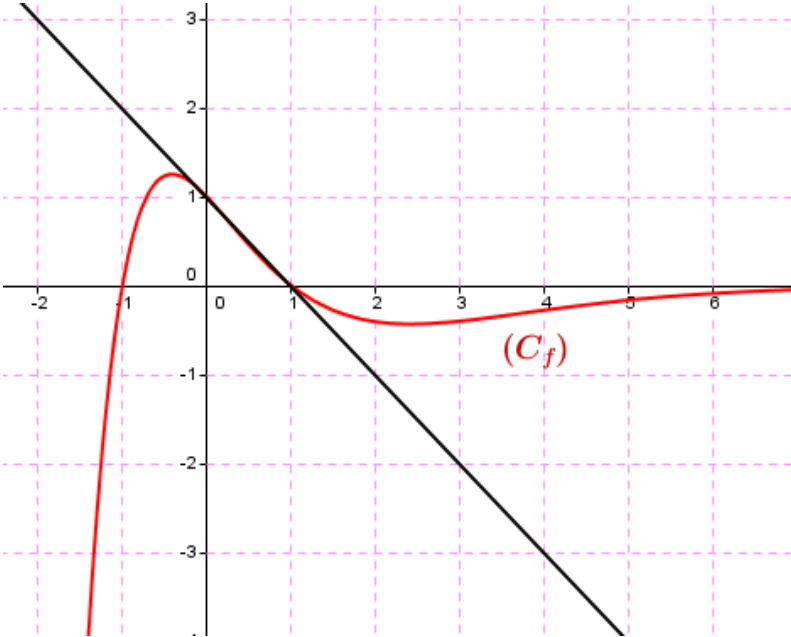
(2) $S = -\ln(n+1)$

(3) $S = -\ln(n)$

التمرين الثاني: (06ن)

المستوي منسوب الى المعلم المتعاود و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ في الشكل المقابل (C_f) التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (1 + ax^2)e^{bx}$ و (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

⊗ بقراءة بيانية اجب عما يلي :

[1] ◀ عين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ماذا تستنتج؟[2] ◀ عين كلا من : $f'(0)$ و $f(0)$ ، $f(-1)$ [3] ◀ أكتب معادلة للمماس (T) .[4] ◀ حل المعادلة $f(x) = 0$ ثم اسنتج اشارة $f(x)$ [5] ◀ عين مجموعة قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = -x + m$ حلا وحيدا سالبا تماما.[6] ◀ اوجد العددين الحقيقيين a و b .[7] ◀ نضع في ما يلي : $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$ (1) ◀ أوجد معادلات المماسات لـ (C_f) التي توازي المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ 

♠ g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x + 1 - x \ln x$.

[1] ♦ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، و $\lim_{x \rightarrow >0} g(x)$

[2] ♦ أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

[3] ♦ بين ان المعادلة $g = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $3.5 < \alpha < 3.6$ ، ثم إستنتج إشارة $g(x)$.

♠ نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$.
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

[1] ♦ بين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما: $x = 0$ و $y = 0$

[2] ♦ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ فإن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$.

[3] ♦ أدرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

[4] ♦ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

[5] ♦ أحسب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

[6] ♦ بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج الى 10^{-2}).

[7] ♦ أنشئ (C_f)

[8] ♦ h هي الدالة العددية المعرفة بـ: $h(x) = \frac{\ln |x|}{|x|+1}$ و (C_h) منحناها البياني

♦ بين أن الدالة h دالة زوجية

بـ ♦ أرسم في نفس المعلم (C_h) مستعينا بـ (C_f)



بأنوفيق

التمرين الاول : (05 نقاط)اختبار الاجابة الصحيحة مع التبرير:(1) الحل الخاص للمعادلة $y' + 2y + 3 = 0$ حيث $f(0) = 1$

هي: $f(x) = \frac{5}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}$ (2)

التبرير: لدينا: $y' = 2y + 3$ ومنه الحل العام هو

$$f(x) = ce^{ax} - \frac{b}{a} \text{ أي } f(x) = ce^{2x} - \frac{3}{2} \text{ وبما ان } f(0) = 1$$

فان $ce^0 - \frac{3}{2} = 1$ أي $c = 1 + \frac{3}{2}$ وفي الاخير الحل الخاص

للمعادلة هو: $f(x) = \frac{5}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}$

(2) حلول المعادلة $e^x + 6e^{-x} - 5 = 0$ هي $\{\ln 2; \ln 3\}$ (1)التبرير: لدينا $e^x + 6e^{-x} - 5 = 0$ بضرب طرفي المعادلة

في e^x نجد $e^x(e^x + 6e^{-x} - 5) = 0$ أي $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$

و بوضع $y = e^x$ نجد: $y^2 - 5y + 6 = 0$ وبحل المعادلة

نجد $y_1 = 2$ او $y_2 = 3$ أي $e^x = 2$ او $e^x = 3$ منه :

$$S = \{\ln 2; \ln 3\}$$

(3) منحنى الدالة f يقبل مغارب مائل في جوار $-\infty$

معادلته: $y = 3x - 1$ (1)

التبرير: لدينا: $y = 3x + b$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (3x + b) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[3x + \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} - 3x - b \right] = 0$$

$$-1 - b = 0$$

لان $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1$ اذن $b = -1$ أي $y = 3x - 1$

(4) فبمذا المجموع S هي: $S = -\ln(n)$ (3)

$$S = \ln \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \right)$$

$$= \ln \left(\frac{1}{n} \right) = \ln(1) - \ln(n) \quad \text{التبرير: لدينا:}$$

$$= -\ln(n)$$

التمرين الثاني : (06 نقطة) بقراءة بيانته

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

نستنتج المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مغاربا افقيا هو حامل

محور الفواصل معادلته $y = 0$

(2) $f(-1) = 0$. $f(0) = 1$ و $f'(0) = -1$

(3) معادلة المماس (T)

لدينا: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ ومنه: $y = -x + 1$

(4) حل المعادلة $f(x) = 0$ واستنتاج اشارة $f(x)$

حلل المعادلة هي $S = \{-1; 1\}$ و اشارة $f(x)$ كما يلي:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

(5) فبمذا $f(x) = 0$ الذي من اجلها نقبل المعادلة

$$f(x) = -x + m$$
 وحلا واحدا سالبا تماما هي :

$$m \in]-\infty; 1[$$

(6) إيجاد العددين الحقيقين a و b :

لدينا $f(-1) = 0$ نكافئ $(1+a)e^{-b} = 0$ ومنه: $a = -1$

ولدينا : $f'(x) = (2ax)e^{bx} + be^{bx}(1+ax^2)$ وبما ان $a = -1$

فان: $f'(x) = -2xe^{bx} + be^{bx}(1-x^2)$

اذن : $f'(0) = -1$ نكافئ : $b = -1$

(7) إيجاد معادلات المماسات :

ومنه $f'(x) = 0$ $-2xe^{-x} - e^{-x}(1-x^2) = 0$ أي

ومنه $e^{-x}(x^2 - 2x - 1) = 0$ نكافئ $x^2 - 2x - 1 = 0$

اذن $x = 1 + \sqrt{2}$ او $x = 1 - \sqrt{2}$

$$(T_2) \cdot y = f(1 + \sqrt{2}) \quad (T_1) \cdot y = f(1 - \sqrt{2})$$

$$y = (2 + 2\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad y = (2 - 2\sqrt{2})e^{-1+\sqrt{2}}$$

التمرين الثالث : (09 نقاط)

I الجزء الاول:

$$g(x) = x + 1 - x \ln x$$

(1) حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1 \quad \text{لان:} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \quad \text{لان:} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{1}{x} - \ln x\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} - \ln x\right) = -\infty$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة g وتشكيل جدول التغيرات:

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ودالتها

$$\text{المشتقة } g'(x) = 1 - (\ln x + 1) = -\ln x \quad \text{اشارة } g'(x):$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	-

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $]0; 1]$ المجال ومتناقصة تماما على $[1; +\infty[$.

جدول التغيرات :

x	0	1	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$			2	$-\infty$

(3) اثبات ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا:

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما (رئيسية) على المجال $[1; +\infty[$ اذن فلهي مستمرة ورئيسية على المجال $[3.5; 3.6]$ لان $[3.5; 3.6] \in [1; +\infty[$ هذا من جهة

$$\text{ومن جهة اخرى} \quad \begin{cases} f(3.5) \simeq 0.12 \\ f(3.6) \simeq -0.01 \end{cases} \quad \text{اي} \quad f(3.5) \times f(3.6) < 0$$

مما سبق وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة

$$g(x) = 0 \quad \text{تقبل حلا وحيدا } \alpha \text{ حيث: } 3.5 < \alpha < 3.6$$

اشارة $g(x)$:

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	-

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \text{(II) الجزء الثاني:}$$

(1) اثبات ان يقبل مستقيمين مقاربين :

لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ وهذا معناه ان حامل محور الفواصل

هو مستقيم مقارب افقي لـ (C_f) معادلته $y = 0$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ وهذا معناه ان حامل محور

النرائب هو مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) و معادلته $x = 0$.

$$(2) \text{ اثبات أن: } f'(x) = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ودالتها

$$\text{المشتقة } f'(x) = \frac{(\ln x)'(x+1) - 1(\ln x)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1) - \ln x}{(x+1)^2} = \frac{x+1-\ln x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x+1-\ln x}{x(x+1)^2} = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$$

(3) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

إشارة المشتقة: لدينا $(x+1)^2 > 0$ و $x > 0$ منه فاشارة

المشتقة من اشارة $g(x)$

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-

إذن الدالة متزايدة تماما على المجال $]0; \alpha]$ ومتناقصة

تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$

جدول التغيرات:

x	0	1	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			$f(\alpha)$	$+\infty$

(4) معادلة المماس (T)

$$\text{لدينا: } y = f'(1)(x-1) + f(1) \quad \text{ومنه} \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad (T)$$

(5) حساب النهايات والتفسير الهندسي:

بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ فان:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = 0$$

التفسير الهندسي: منحنى الدالة f يقبل مماسا موازيا

لحامل محور الفواصل في النقط ذات الفاصلة α

$$\text{معادلته: } y = f(\alpha)$$

(6) اثبات ان : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ واستنتاج حصر لـ

(1ط) لدينا : $f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{\alpha+1}$ ومما سبق لدينا $g(\alpha) = 0$ ومنه $\alpha + 1 - \alpha \ln \alpha = 0$ أي $\ln \alpha = \frac{\alpha+1}{\alpha}$ وبالتعويض نجد :

حصر $f(\alpha)$ لدينا $3.5 < \alpha < 3.6$ ومنه $\frac{1}{3.6} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{3.5}$ اذن $0.28 < f(\alpha) < 0.29$

(2ط) اثبات ان : $f(\alpha) - \frac{1}{\alpha} = 0$

$$f(\alpha) = \frac{-(\alpha+1-\alpha \ln \alpha)}{(\alpha+1)\alpha} = -\frac{g(\alpha)}{(\alpha+1)\alpha} \quad \text{ومنه} \quad f(\alpha) = \frac{\alpha \ln \alpha - \alpha - 1}{(\alpha+1)\alpha} \quad f(\alpha) - \frac{1}{\alpha} = \frac{\ln \alpha}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha}$$

بما أن $g(\alpha) = 0$ نجد : $f(\alpha) - \frac{1}{\alpha} = 0$

(7) انشاء المنحنى (C_f)

(8) لدينا : $h(x) = \frac{\ln |x|}{|x|+1}$

(أ) اثبات ان h دالة زوجية: الدالة h معرفة على $\mathbb{R}$ ومنه من اجل كل عدد حقيقي $x \in \mathbb{R}$ فان $-x \in \mathbb{R}$

ولدينا : $h(x) = \frac{\ln |x|}{|x|+1}$ ومنه فالدالة h دالة زوجية.

(ب) رسم المنحنى (C_h) في نفس المعلم

